สมการเชิงเส้น มัธยม

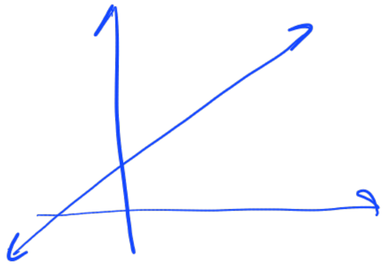
$y = mx + c$

$Ax + By + C = 0$

เช่น

$y = 2x + 5$

$6x + 7y - 10 = 0$



CHAPTER 1

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

โจทย์ธุรกิจ

บริษัท ABC Furniture เป็นบริษัทที่ผลิตและจำหน่ายเฟอร์นิเจอร์สำหรับบ้านและสำนักงาน โดยสินค้าหลักของบริษัทคือ โต๊ะทำงาน และ ตู้เก็บเอกสาร ซึ่งสินค้าทั้งสองชนิดนี้ได้รับความนิยมอย่างมาก จนกระทั่งฝ่ายผลิตเริ่มมีปัญหาในการจัดการวัตถุดิบและทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

ล่าสุด คุณได้รับการติดต่อจากคุณสมชาย ผู้จัดการฝ่ายการผลิตของบริษัท ABC Furniture ซึ่งให้ข้อมูลว่า:

ข้อความ

ช่วงที่ผ่านมา เราพบปัญหาด้านการผลิตที่สำคัญ คือบริษัทของเรามีทรัพยากรที่จำกัด ไม่ว่าจะเป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของแรงงาน รวมถึงปริมาณวัตถุดิบหลักที่ต้องใช้ในการผลิต แต่เรายังต้องการเพิ่มผลผลิตเพื่อให้สามารถตอบสนองความต้องการที่สูงขึ้นของตลาด

ในแต่ละสัปดาห์ โรงงานของเรามีแรงงานที่สามารถทำงานได้สูงสุด 1,000 ชั่วโมง โดยโต๊ะทำงานแต่ละตัวต้องใช้แรงงานในการประกอบ 4 ชั่วโมง ส่วนตู้เก็บเอกสารใช้ 3 ชั่วโมง

$4a + 3b \rightarrow 4a + 3b \le 1000$

ด้านวัตถุดิบ เรามีไม้สำเร็จรูปที่ใช้ในการผลิตเพียง 800 หน่วยต่อสัปดาห์ โดยโต๊ะทำงาน 1 ตัวจะต้องใช้ไม้ 2 หน่วย และตู้เก็บเอกสารใช้ไม้ 1 หน่วย

$1b + 2a \rightarrow 2a + 1b \le 800$

ขณะนี้ บริษัทสามารถขายโต๊ะทำงานได้ในราคาตัวละ 2,000 บาท และตู้เก็บเอกสารราคา 1,500 บาท

ทางผู้บริหารอยากได้คำแนะนำจากคุณว่า เราควรจะผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสารจำนวนอย่างละกี่ชิ้นต่อสัปดาห์ เพื่อให้บริษัทสามารถทำกำไรได้สูงสุดภายใต้ข้อจำกัดที่มีอยู่

ยอดขาย

a ตัว b ตัว

ชั่วโมงโต๊ะ

$1 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 8$

$3 \rightarrow 12$

$\vdots$

$a \rightarrow 4a$

ในฐานะนักวิเคราะห์เชิงปริมาณ คุณมีหน้าที่ช่วยเหลือบริษัท ABC Furniture

ขายได้ $2000a + 1500b$

$\Downarrow$

$2000a + 1500b$ ที่สูงที่สุด

- เป้าหมายหลักของโจทย์นี้คืออะไร และวัดผลอย่างไร
- ข้อจำกัดมีอะไรบ้าง
- อะไรคือสิ่งที่เราจะต้องตอบให้แก่ลูกค้า
- ทำไมการผลิตทุกอย่างให้ได้จำนวนสูงสุด อาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดีที่สุด?

เช่น $a = 15,\ b = 45$

ชั่วโมง $4a + 3b = 4 \times 15 + 3 \times 45 = 195$

วัตถุดิบ $2a + 1b = 2 \times 15 + 1 \times 45 = 75$

ยอดขาย $= 2000a + 1500b$

$= 2000 \times 15 + 1500 \times 45$

$= 97500$

(ควรขายได้มากกว่านี้)

บทนำ

ในการตัดสินใจทางธุรกิจที่มีประสิทธิภาพ การวิเคราะห์เชิงปริมาณเป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้ผู้บริหารสามารถประเมินทางเลือกต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการจัดสรรทรัพยากรอย่างเหมาะสม เช่น เวลา งบประมาณ หรือวัตถุดิบ หนึ่งในเทคนิคที่ได้รับความนิยมและใช้งานอย่างแพร่หลายในทางธุรกิจคือ “การกำหนดการเชิงเส้น” ซึ่งเป็นวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นการหาคำตอบที่ดีที่สุดภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนดไว้ ย่อหน้าต่อไปนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานของการกำหนดการเชิงเส้น พร้อมทั้งวิธีการสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาในโลกธุรกิจจริง

ทั้งนี้ คำว่าการโปรแกรมในที่นี้ไม่ได้หมายถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่เป็นรูปแบบปัญหาเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับแผนงานและคำสั่ง (program) ในกระบวนการงาน ดังนั้นจะไม่มีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใด ๆ เกิดขึ้นในบทนี้ อย่างมากที่สุดคือใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้โจทย์ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้น

เนื้อหาในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจก่อนว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นคืออะไร และปัญหาที่มีลักษณะแบบใดบ้างที่จะสามารถใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นเข้ามาแก้ปัญหารวมไปถึงวิธีแปลงปัญหานั้นให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น หลังจากที่เราสร้างตัวแบบได้แล้วนั้น เราก็จะมาศึกษาแนวคิดเบื้องต้นของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการดูกราฟใน 2 และ 3 มิติกันก่อน เพื่อให้เห็นพฤติกรรมพื้นฐานที่จำเป็นต้องรู้เกี่ยวกับตัวปัญหากำหนดการเชิงเส้น ซึ่งในหัวข้อนี้จำเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานในหัวข้อ **??** ก่อน เพื่อที่จะได้วาดกราฟเส้นตรงเพื่อแก้ปัญหาได้ หลังจากนั้น เราจะขยายแนวคิดการแก้ปัญหาจากการใช้รูปภาพแก้ปัญหามาเป็นการแก้ด้วยขั้นตอนกระบวนการที่เรียกว่า Simplex และเมื่อเราเข้าใจแนวคิดของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นแล้ว เราจะปิดท้ายด้วยการใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1.1 ความหมายของการกำหนดการเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบ

กำหนดการเชิงเส้น (linear programming) คือปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าสุดขีด (ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด) ที่เรียกว่าการทำ optimization โดยที่มีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขอยู่ในรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้น โดยองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้นมีดังนี้

1. ฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) คือฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าของสิ่งที่เราอยากหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ที่กำหนดด้วยตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
2. เงื่อนไข (constraints) คือตัวกำหนดความเป็นไปได้ของเหล่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันจุดประสงค์

และเมื่อมีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขแล้ว เราจะเขียนปัญหากำหนดการเชิงเส้นในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{objective function} \\ \text{s.t.} \quad & \text{constraint } 1 \\ & \text{constraint } 2 \\ & \quad \vdots \\ & \text{constraint } k \end{aligned}$$

สำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุด และในทำนองเดียวกันก็สามารถเขียนปัญหาการหาค่าสูงสุดได้โดยใช้

$$
\begin{array}{rl}
\max & \text{objective function} \\
\text{s.t.} & \text{constraint } 1 \\
 & \text{constraint } 2 \\
 & \vdots \\
 & \text{constraint } k
\end{array}
$$

ตัวอย่างต้นบท

$$
\boxed{
\begin{array}{rl}
\text{Max} & 2000a + 1500b \\
\text{s.t.} & 4a + 3b \le 1000 \\
 & 2a + 1b \le 800 \\
 & a \geq 0 \\
 & b \geq 0
\end{array}
}
$$

ทั้งนี้ สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ และสมการหรืออสมการเงื่อนไขนั้นจะต้องอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น กล่าวคือต้องอยู่ในรูปที่ตัวแปรคูณกับค่าคงที่แล้วบวกหรือลบกันระหว่างตัวแปร

1.1.1 ลักษณะของปัญหาที่สามารถเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้

จากที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของความเป็นเชิงเส้นมาแล้วนั้น จะพบว่าคุณสมบัติหลัก ๆ ที่ช่วยตัดสินใจได้ว่าปัญหาแบบใดมีโอกาสที่จะเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

คุณสมบัติ 1.1: คุณสมบัติความเป็นอิสระเชิงเส้น (linear independence) ระหว่างตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์

กล่าวคือ การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลการเปลี่ยนแปลงที่คงที่กับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ถ้าตัวแปรอื่น ๆ ถูกกำหนดให้คงค่าเดิมไว้ ตัวอย่างเช่น เราอาจทราบว่าการเพิ่มขึ้นของของการลงทุนเพิ่มทุก ๆ 1 หน่วยเงิน จะเพิ่มกำไร (สิ่งที่เป็นค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์) ได้ 0.25 หน่วยเงิน ไม่ว่าจะลงทุนไปแล้วเท่าไหร่ก็ตาม ซึ่งในกรณีตัวอย่างนี้จะได้ว่า

$$\text{กำไร} = 0.25\text{เงินลงทุน} + \text{ค่าปัจจัยอื่น ๆ ที่คงตัวอยู่}$$

ซึ่ง “ค่าปัจจัยอื่น ๆ ที่คงตัวอยู่” หมายถึงค่าจากการคำนวณกำไรจากตัวแปรอื่น ๆ ซึ่งไม่ได้ถูกกล่าวถึงในบริบทนี้จึงถูกมองว่าไม่ได้เปลี่ยนแปลง

ทั้งนี้ จะเห็นว่าอัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลงที่คงตัวนั้น แท้ที่จริงแล้วก็เปรียบเสมือนเป็นความชันของการเพิ่มขึ้นตามแนวตัวแปรต้นนั้นนั่นเอง ดังนั้น ในกรณีที่มั่นใจแล้วว่าการเพิ่มหรือการลดค่าจุดประสงค์ขึ้นกับตัวแปรต้นที่เรามีในระบบเป็นการแปรผันตรงกัน ก็จะค่อนข้างมั่นใจได้ในระดับหนึ่งว่าปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น แต่ทั้งนี้ วิธีที่จะสามารถทำให้มั่นใจได้มากที่สุดว่าปัญหาที่มีเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นหรือไม่ ก็คือการเขียนตัวสมการคณิตศาสตร์ที่แสดงแทนฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไข (ที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อ ??) ว่าอยู่ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นหรือไม่

ตัวอย่าง 1.1.1: ตัวอย่างปัญหารูปแบบกำหนดการเชิงเส้น

บริษัทประกอบชิ้นส่วนเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเวลาเหลืออยู่ในแต่ละแผนกดังนี้

① ตัวแปรตัดสินใจ
② เงื่อนไข
③ จุดประสงค์ < max min

- แผนกประกอบ มีเวลาเหลือ 50 ชั่วโมง (หรือ 3000 นาที) เวลาประกอบ ≤ 3000
- แผนกทดสอบ มีเวลาเหลือ 15 ชั่วโมง (หรือ 900 นาที) เวลาทดสอบ ≤ 900
- แผนกบรรจุ มีเวลาเหลือ 6 ชั่วโมง (หรือ 360 นาที) เวลาบรรจุ ≤ 360

ซึ่งทางบริษัทกำลังตัดสินใจว่าจะใช้เวลาของแต่ละแผนกที่เหลืออยู่ผลิตผลิตภัณฑ์ชิ้นใหม่ซึ่งมี 2 แบบคือแบบมาตรฐานและแบบพิเศษ ทั้งนี้แบบมาตรฐานใช้เวลาในการประกอบ 20 นาที, ทดสอบ 10 นาที และบรรจุ 3 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 250 บาทต่อชิ้น ในขณะที่แบบพิเศษใช้เวลาในการประกอบ 30 นาที, ทดสอบ 6 นาที และบรรจุ 3 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 290 บาทต่อชิ้น บริษัทต้องการหาว่าจะต้องผลิตสินค้าแต่ละชนิดเท่าไหร่ให้ได้กำไรมากที่สุด แต่ทั้งนี้เนื่องจากเรายังไม่ได้เรียนวิธีการแก้ปัญหา เราจึงทำปัญหาให้ง่ายขึ้นก่อนดังนี้

กำไรรวม

1. ถ้าผลิตแบบมาตรฐานอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่ 90 ชิ้น
2. ถ้าผลิตแบบพิเศษอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่ (ทำเอง)
3. ถ้าเปลี่ยนไปผลิตแบบอื่นโดยมห้นักศึกษาลองสุ่มเลขมาชุดหนึ่งและยืนยันว่าผลิตได้จริงตามเงื่อนไข และหาว่าได้กำไรเท่าไหร่ และถ้ายังเหลือเวลามากพอให้ลองเพิ่มการผลิตเข้าไปอีกจนไม่เหลือเวลาให้ผลิตเพิ่มได้อีกแล้ว

x = จำนวนชิ้นแบบมาตรฐานที่ผลิต
- เวลาประกอบ = $20x$ นาที
- เวลาทดสอบ = $10x$ นาที
- เวลาบรรจุ = $3x$ นาที

y = จำนวนชิ้นแบบพิเศษที่ผลิต
- ประกอบ = $30y$ นาที
- ทดสอบ = $6y$ นาที
- บรรจุ = $3y$ นาที

เวลาประกอบ = $20x + 30y \leq 3000$
เวลาทดสอบ = $10x + 6y \leq 900$
เวลาบรรจุ = $3x + 3y \leq 360$

$\boxed{\text{กำไรรวม} = 250x + 290y}$

① ให้ $y=0$

ประกอบ : $20x \leq 3000$ → $\boxed{x \leq \frac{3000}{20} = 150}$
ทดสอบ : $10x \leq 900$ → $\boxed{x \leq 90}$
บรรจุ : $3x \leq 360$ → $\boxed{x \leq 120}$

มากสุดแค่ $x = 90$ ชิ้น $(y=0)$
∴ กำไร $= 250 \times 90 + 290 \times 0$
$= 22500$

1.1.2 การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น

อย่างที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อ ?? สิ่งที่สำคัญที่สุดที่ต้องทำให้ได้คือการระบุตัวแปรตัดสินใจ ฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขต่าง ๆ ให้ได้ และเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบภาษาคณิตศาสตร์ ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะมาฝึกทำไปตามตัวอย่างกัน

min = minimize = ทำให้ต่ำสุด

ตัวอย่าง 1.1.2

จากกรณีตัวอย่าง 1.1.1 จงเขียนตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

1. ตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้องมีอะไรบ้าง x = จำนวนชิ้นมาตรฐาน , y = จำนวนชิ้นพิเศษ
2. ค่าเป้าหมายที่ต้องการหาค่าสุดขีดคืออะไร และต้องการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด กำไร → max กำไรรวม
3. ฟังก์ชันจุดประสงค์คืออะไร กำไร = $250x + 290y$
4. มีทั้งหมดกี่เงื่อนไขและเงื่อนไขอะไรบ้าง maximize = ทำให้สูงสุด
5. เขียนเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปของสมการ/อสมการคณิตศาสตร์
6. ปัญหาที่ได้เป็นปัญหาเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าเป็นจงเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาการกำหนดเชิงเส้น ✓

(A) (B)

เวลาประกอบ = $20x + 30y \le 3000$

เวลาทดสอบ = $10x + 6y \le 900$

เวลาบรรจุ = $3x + 3y \le 360$

ฟังก์ชันจุดประสงค์

max $250x + 290y$ (กำไร)

s.t.
$$20x + 30y \le 3000$$
$$10x + 6y \le 900$$
$$3x + 3y \le 360$$
$$x, y \ge 0 \text{ —— ***}$$

เงื่อนไข

ตัวอย่าง 1.1.3: ตัวอย่างการผลิตเพื่อให้ได้ยอดขายสูงสุด

โรงงานผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ต้องการวางแผนการผลิตชิ้นส่วน X และชิ้นส่วน Y โดยมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 4 เครื่อง และใช้เหล็ก ไฟฟ้าและแรงงานในการผลิตดังนี้

ประบวนการ	ปริมาณที่ผลิตได้		ความต้องการ		
	X	Y	เหล็ก	ไฟฟ้า	แรงงาน
1	4	0	100 kg	800 kWh	16 hrs
2	0	1	70 kg	600 kWh	16 hrs
3	3	1	120 kg	2000 kWh	50 hrs
4	6	3	270 kg	4000 kWh	48 hrs

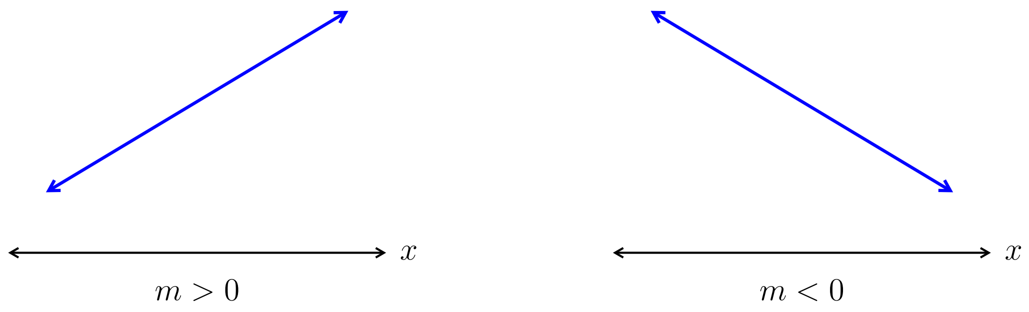
ในแต่ละวัน โรงงานจะมีเหล็กให้ใช้ไม่เกิน 6000 กิโลกรัม มีปริมาณไฟฟ้าที่ใช้ได้ไม่เกิน 100000 กิโลวัตต์ และใช้แรงงานคนงานรวมกันได้ไม่เกิน 1000 ชั่วโมง สมมติว่าชิ้นส่วน X ขายได้ 1000 บาทต่อชิ้น ในขณะที่ชิ้นส่วน Y ขายได้ 1800 บาทต่อชิ้น และโรงงานนี้ต้องการจัดการผลิตให้มียอดขายสูงที่สุดเท่าที่จะทำได้

1.2 แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

หลังจากที่เราสามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นได้แล้ว สิ่งที่จะต้องทำต่อมาก็คือการหาผลเฉลยของปัญหานั้น ซึ่งแนวคิดหลักของการทำกำหนดการเชิงเส้นเป็นสิ่งที่ไม่ได้ซับซ้อนมากนัก ถ้าพิจารณาในกรณี 1 ตัวแปรหรือ 2 ตัวแปร เพราะเป็นกรณีที่ยังคงวาดกราฟได้ และการศึกษาจากกรณีเล็ก ๆ นี้ก็จะสามารถนำพาเราไปสู่แนวคิดที่ทั่วไปมากขึ้นได้

1.2.1 กรณี 1 ตัวแปรตัดสินใจ

ขอเริ่มจากกรณีที่ชัดเจนและตรงไปตรงมามากที่สุดก่อน ซึ่งก็คือกรณี 1 ตัวแปร ซึ่งจะสามารถวาดทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขได้โดยง่ายในกราฟ 2 มิติ องค์ประกอบแรกสุดคือฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ ดังนั้น หน้าตาของสมการจะอยู่ในรูป $f(x) = mx + c$ และแน่นอนว่ามีความเป็นไปได้หลัก ๆ อยู่ 2 แบบคือเส้นตรงความชันบวก กับเส้นตรงความชันลบดังรูป



จากรูป จะพบว่าการแก้ปัญหาหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของจะง่ายอย่างมาก เพราะการเดินทางมีแค่ซ้ายและขวา โดยด้านใดด้านหนึ่งจะให้ค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ และอีกด้านหนึ่งจะให้ค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ดังนั้น เพียงแค่เราทราบว่าต้องเดินไปทางไหนเพื่อให้เป็นไปตามที่เราต้องการ เราก็จะได้คำตอบมาได้โดยง่าย

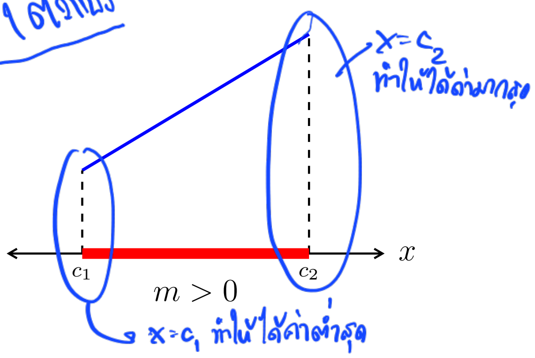
แต่ทว่าในปัญหากำหนดการเชิงเส้น จะต้องมีเงื่อนไขเข้ามาพิจารณาด้วย เพราะถ้าไม่มีเงื่อนไขมาพิจารณา เราจะสามารถลดค่าหรือเพิ่มค่าเส้นตรงได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เพราะเราก็สามารถเดินทางไปทางขวาได้ไม่มีที่สุด และเดินทางไปทางซ้ายได้ไม่มีที่สิ้นสุดเช่นกัน ซึ่งเราเรียกรูปแบบการไม่มีผลเฉลยแบบนี้ว่ากรณีไม่มีขอบเขต (unbounded) กล่าวคือเป็นกรณีที่มีค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (ถ้ามี) แต่ไม่มีผลเฉลยที่ทำให้ต่ำที่สุด หรือสูงที่สุดได้เพราะยังหาค่าที่สูงกว่าได้เรื่อย ๆ หรือหาค่าที่ต่ำกว่าได้เรื่อย ๆ เนื่องจากขอบเขตการเพิ่มหรือการลดไม่มีขีดจำกัด

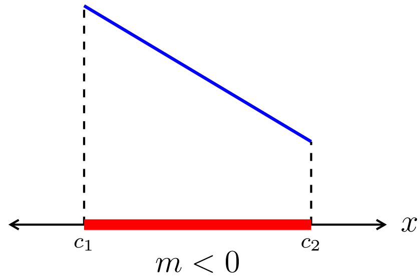
แต่เนื่องจากเงื่อนไขของ 1 ตัวแปรเป็นเพียงได้แค่ 3 แบบเท่านั้นดังนี้

- ◇ สมการจุดเดียว $x = c$ (ในที่นี้ c คือค่าคงที่) ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีอะไรน่าสนใจ เพราะมีเพียงผลเฉลยเดียว ไม่ต้องทำการหาค่าสุดขีดใด ๆ
- ◇ แบบอสมการ และได้เป็นขอบเขต ซึ่งมีได้ 3 แบบย่อย ได้แก่
  - $x \leq c$
  - $x \geq c$
  - $c_1 \leq x \leq c_2$

แต่ในที่นี้ขอให้พิจารณาแค่เฉพาะกรณีที่การันตีการมีผลเฉลยสุดขีดแน่ ๆ ก็คือกรณีที่ขอบเขตเงื่อนไขการพิจารณาตัวแปรมีขอบเขตทั้งซ้ายและขวา $c_1 \leq x \leq c_2$

ถ้ามีแค่ 1 ตัวแปร





ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่า**ค่าสุดขีดจะเกิดขึ้นที่ตรงขอบเสมอ** (แต่จะเป็นด้านซ้ายหรือด้านขวานั้น จะขึ้นอยู่กับรูปแบบการเพิ่มหรือการลดของฟังก์ชัน)

1.2.2 กรณี 2 ตัวแปรตัดสินใจ: ฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นระนาบ 3 มิติบนบริเวณผลเฉลย 2 มิติ

ขอขยับเพิ่มขึ้นมาอีก 1 มิติ นั่นคือฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $z = f(x, y)$ ซึ่งฟังก์ชันเชิงเส้น 2 ตัวแปรจะวาดกราฟใน 3 มิติได้เป็นแผ่นระนาบที่ได้เรียนไปในหัวข้อ **??** ทว่า สิ่งที่ทำให้กรณีนี้ยากกว่ากรณี 1 ตัวแปรคือบริเวณการตัดสินใจจะเป็นพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม 2 มิติ ซึ่งไม่ได้มีการเดินแค่ซ้ายหรือขวาเหมือนกรณีที่ผ่านมา จึงทำให้ตัดสินใจได้ยากขึ้นอีกระดับว่าการเดินไปทางใดจะให้ค่าที่มากขึ้น

คำเตือน: สำหรับหัวข้อนี้ อาจจะต้องใช้ความรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ 3 มิติและแคลคูลัสสำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติเพื่อทำความเข้าใจ แต่ถ้านักศึกษาไม่เคยเรียนมาก่อนสามารถข้ามส่วนอธิบายที่มา แล้วเชื่อคุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้ได้เลย

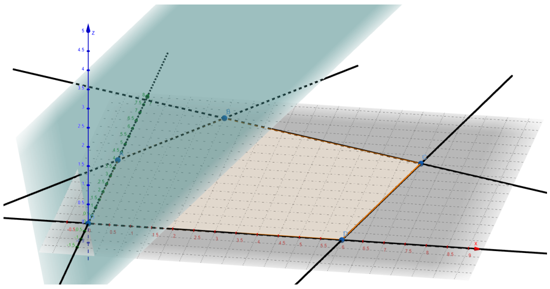
คุณสมบัติ 1.2: คุณสมบัติของระนาบ 3 มิติบนพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม

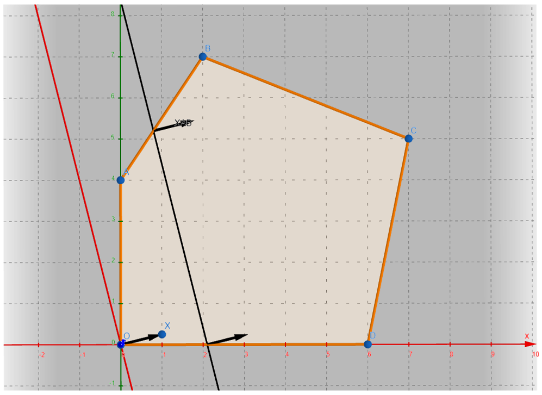
กำหนดสมการแผ่นระนาบ $P : z = Ax + By + k$ ซึ่งมีจะมีเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ เป็นเวกเตอร์ทิศการไต่ระดับ

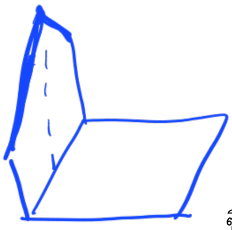
1. แนวสันของระนาบ P (แนวการเดินบนระนาบที่ไม่มีการเปลี่ยนความสูง) คือแนวเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ กล่าวคือ ถ้าเดินไปตามทิศของเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ จะเป็นทิศที่มีการเปลี่ยนค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุด แล้วลดทอนลงไปตามมุมที่หันออกจากแนวดังกล่าว จนจะไม่มีการเพิ่มค่าหรือลดค่าลงเมื่อหันตั้งฉากไปทางซ้ายและทางขวา
2. เมื่อยืนอยู่บนเส้นขอบของบริเวณตัดสินใจหนึ่ง จะมีทิศที่ลากเวกเตอร์จากจุดที่ยืนหนึ่งทำมุมแหลมกับเวกเตอร์ทิศการไต่ระดับ ในขณะที่อีกด้านจะทำมุมป้านกับทิศการไต่ระดับ ซึ่งค่า z จะมากขึ้นถ้าเราเดินไปตามทิศที่ทำมุมแหลม กล่าวคือ จะต้องมีทิศหนึ่งที่ให้ค่า z มากขึ้น และในขณะที่อีกทิศหนึ่งให้ค่า z ที่น้อยลง
3. เพราะฉะนั้น ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยสุดขีดแล้วจุดผลเฉลยดังกล่าวจะอยู่ที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งเสมอ

ตัวอย่างเช่นปัญหากำหนดการเชิงเส้น

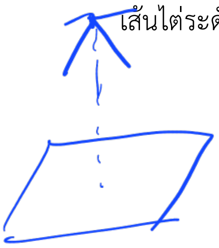
$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x + 0.25y \\
\text{s.t.} \quad & x \geq 0 \\
& y \geq 0 \\
& y \leq 1.5x + 4 \\
& y \leq -0.4x + 7.8 \\
& y \geq 5x - 30
\end{aligned}
$$

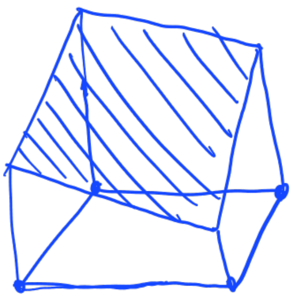


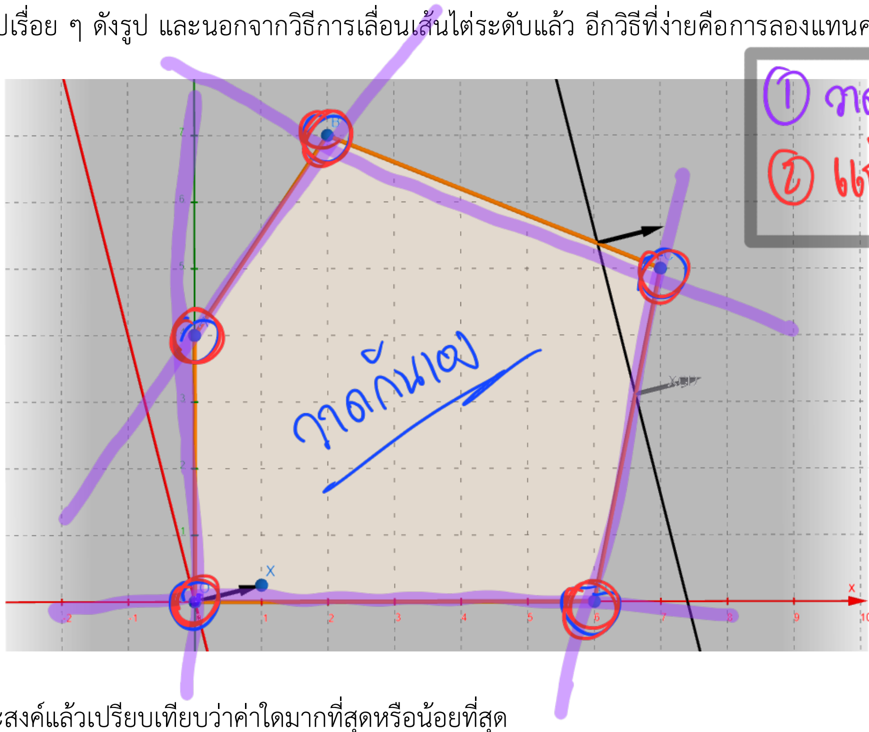




ซึ่งถ้าใช้แนวคิดการไต่เขาตามให้ขนานกับแนวการไต่ระดับ จะพบว่าจุดสุดท้ายที่จะไต่ขึ้นไปได้คือจุด C ด้วยการลาก เส้นไต่ระดับขึ้นไปเรื่อย ๆ ดังรูป และนอกจากวิธีการเลื่อนเส้นไต่ระดับแล้ว อีกวิธีที่ง่ายคือการลองแทนค่าทุกจุดยอดเพื่อ







① วาดเส้นตามได้
② แก้สมการหาจุดตัด

คำนวณค่าจุดประสงค์แล้วเปรียบเทียบว่าค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุด

ตัวอย่าง 1.2.1: โจทย์สำรวจคุณสมบัติ 1.2

พิจารณาโจทย์กำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x + 0.25y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & y \leq 1.5x + 4 \\ & y \leq -0.4x + 7.8 \\ & y \geq 5x - 30 \end{aligned}$$

1. จงแสดงว่าสมการเส้นตรงที่ระบุแนวหน้ากระดานการไต่ระดับ (เส้นที่เลื่อนตามรูปด้านบน) ที่ตัดแกน y ที่ $y = c$ มีสมการเป็น $y = -4x + c$ กล่าวคือ แนวเส้นตรงที่มีความชัน -4 จะเป็นแนวที่ระนามมีค่าคงที่
2. เมื่อพิจารณาบนแนวเส้นที่ทำให้ระนาบมีค่าคงที่ $y = -4x + 8$ เป็นตัวอย่าง จงหาจุดตัดของเส้นดังกล่าวกับเส้นตรง $y = 1.5x + 4$ กับเส้นตรง $y = 0$
3. จากจุดตัดที่ได้ในข้อที่ผ่านมา (ซึ่งมี 2 จุด) จงแสดงว่าทั้งสองจุดดังกล่าวให้ค่า $z = x + 0.25y$ เป็น $z = 2$
4. เมื่อ พิจารณา บน แนว เส้น ที่ ทำให้ ระนาบ มี ค่า คงที่ $y = -4x + c$ จง แสดง ว่า ค่าคงที่ของระนาบคือ $z = 0.25c$

ตัวอย่าง 1.2.2: แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จงแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง ~~1.1.3~~ 1.1.1 ด้วยวิธีวาดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดทั้งวิธีการไต่ระดับ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

ฟังก์ชันจุดประสงค์

max $250x + 290y$ (กำไร)

s.t. $20x + 30y \le 3000$

$10x + 6y \le 900$

~~$3x + 4y \le 360$~~

$x, y \ge 0$ ——— ***

เงื่อนไข

① เขียนแบบจำลอง

② วาดเส้นตามขอบ เงื่อนไข

③ หาจุดตัด (แต่ละคู่) → ได้รูปพื้นที่

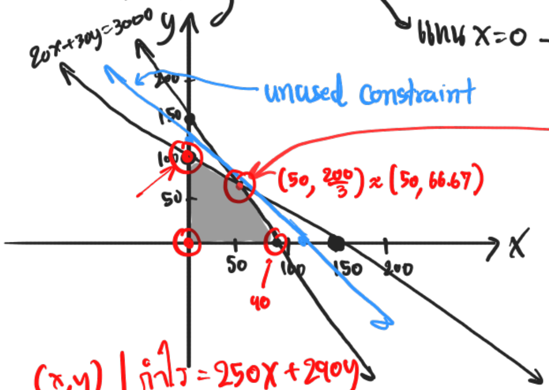
④ หาค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มุมต่างๆ แล้วเอามาเปรียบเทียบกัน

↳ มากสุด / น้อยสุด

$20x + 30y = 3000$

แทน $y = 0 \rightarrow 20x = 3000 \Rightarrow x = 150$

แทน $x = 0 \rightarrow 30y = 3000 \Rightarrow y = 100$



$20x + 30y = 3000$ —①

$10x + 6y = 900$ —②

$(x = 50 ✓, y = \frac{200}{3} \approx 66.67 ✓)$

กำจัด x ด้วยการทำ ค.ร.น. ให้เป็น 20

②×2; $2(10x + 6y) = 2(900)$

$20x + 12y = 1800$ —③

$20x + 30y = 3000$ —①

③−①; $(\cancel{20x} + 12y) - (\cancel{20x} + 30y) = 1800 - 3000$

$-18y = -1200$

$y = \frac{-1200}{-18} = \frac{200}{3}$

แทน $y = \frac{200}{3}$ ใน ②; $10x + 6\left(\frac{200}{3}\right) = 900$

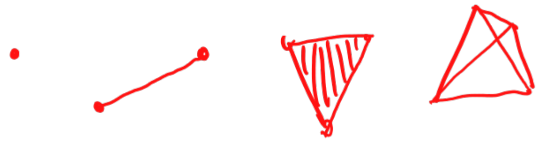
$10x + 400 = 900$

$10x = 500$

$x = \frac{500}{10} = 50$

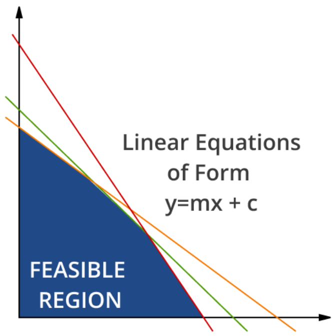
(x,y)	กำไร = 250x + 290y
(0,0)	0
(0,100)	250·0 + 290·100 = 29000
$(50, \frac{200}{3}) \approx (50, 66)$	250·50 + 290·66 = $\boxed{31640}$
(90,0)	250·90 + 290·0 = 22500

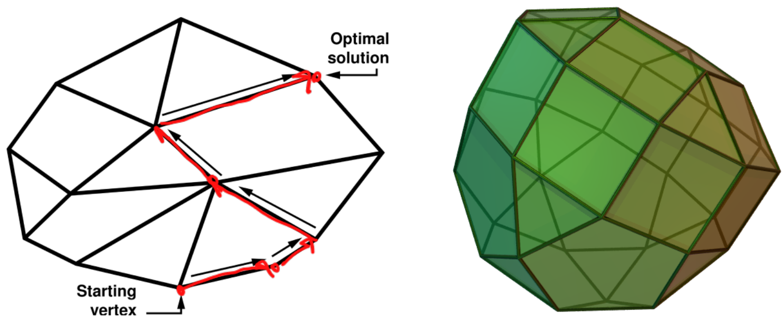
∴ กำไรสูงสุด = 31640 โดยที่ผลิตแบบธรรมดา 50 ชิ้น
พิเศษ 66 ชิ้น



1.3 แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

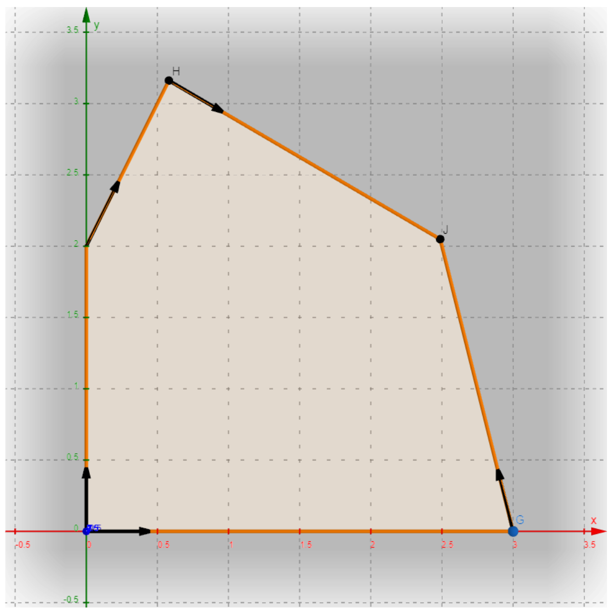
ในหัวข้อที่แล้ว เราศึกษาวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการรูปภาพ ซึ่งข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวคือเราจะสามารถแก้ปัญหาได้แค่กรณี 2 ตัวแปร และจริง ๆ แล้ว เราสามารถทำกับปัญหา 3 ตัวแปรก็ได้เช่นกันแต่จะวาดภาพยากกว่า เพราะต้องดูขอบเขตผลเฉลยใน 3 มิติ แต่ว่าถ้า 4 ตัวแปรเป็นต้นไปเราจะไม่สามารถวาดภาพได้อีกแล้ว ทำให้วิธีการดังกล่าวใช้ไม่ได้อีกต่อไป





2D Visualization **3D Visualization**

เครื่องมือที่จะใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นสำหรับกรณีใด ๆ ก็ตามที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) ซึ่งเป็นกระบวนการในการใช้การดำเนินการทางเมทริกซ์เพื่อการเปลี่ยน pivot ที่จะให้ค่าสูงขึ้นเรื่อย ๆ ไล่ไปตามขอบของรูป โดยอาศัยคุณสมบัติตามที่เราได้ศึกษามาในกรณี 2 มิติว่าการเดินตามขอบบนบริเวณที่เป็นรูปนูน (convex) จะพาเราไปจุดผลเฉลยค่าสุดขีดได้แน่ ๆ



ทั้งนี้ สิ่งหนึ่งที่ต้องเน้นย้ำสำหรับขั้นตอนกระบวนการนี้คือสมมติฐานการเป็นรูปนูน เพราะอัลกอริทึมที่กำลังจะได้ศึกษาอาศัยการเดินตามเส้นขอบตามทิศทางที่มีค่าเพิ่มได้ ซึ่งเงื่อนไขที่การันตีการไปจุดผลเฉลยสุดขีดได้คือการเป็นรูปนูนที่ทำให้เราไต่ระนาบขึ้นได้เรื่อย ๆ เสมอตามรูปด้านบนที่เราสามารถเดินทางจากจุด O ไปที่จุด J ที่เป็นผลเฉลยได้ แต่ถ้ารูปพื้นที่