คณิตศาสตร์ดีสครีตสำหรับการเขียนโปรแกรม

(Discrete Mathematics for Programming)

Phaphontee Yamchote

Information System for Digital Business, Faculty of Business Administration

Southeast Asia University

Update at April 10, 2026

Contents

Prologue

819605 Discrete Mathematics (2/2568)

สำหรับการสอนรายวิชา 819605 Discrete Mathematics ของหลักสูตรวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ออนไลน์ มหาวิทยาลัยเอเชียอาคเนย์ ในภาคการศึกษาปลาย ประจำปีการศึกษา 2568 นี้ ถือเป็นครั้งแรกที่ผู้เขียนได้สอนวิชา Discrete Mathematics อย่างเป็นทางการในฐานะอาจารย์มหาวิทยาลัย หลังจากที่เคยสอนวิชานี้ในรูปแบบติวเตอร์มานับครั้งไม่ถ้วน การสอนในฐานะติวเตอร์นั้นมักเป็นเพียงการถ่ายทอดเนื้อหาตามที่สถาบันติวได้จัดเตรียมไว้ให้ ซึ่งหลายครั้งก็ทำให้ผู้สอนรู้สึกสงสัยว่าทำไมเนื้อหาบางส่วนถูกจัดมาโดยข้ามหัวข้อสำคัญ หรือไม่เรียงตามตรรกะของการเรียนรู้ที่ควรจะเป็น

ในฐานะอาจารย์ ผู้เขียนจึงมีโอกาสได้ออกแบบลำดับการสอนใหม่ทั้งหมด ตั้งแต่แนวคิด วิธีอธิบาย ไปจนถึงแบบฝึกหัด โดยพยายามรักษาสมดุลระหว่าง “ความเป็นคณิตศาสตร์” ที่เข้มงวด กับ “ความเป็นวิทยาการคอมพิวเตอร์” ที่มุ่งใช้งานจริง โดยเฉพาะในส่วนของการสอนเรื่องการพิสูจน์ (Method of Proof) ซึ่งแม้จะเป็นหัวใจของวิชานี้ แต่ก็ไม่จำเป็นต้องแยกสอนเป็นบท ๆ แบบที่นักศึกษาคณะคณิตศาสตร์เรียนกัน หากแต่สามารถบูรณาการเข้าไปในหัวข้อต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นการประยุกต์ของแต่ละวิธีพิสูจน์อย่างเป็นธรรมชาติและต่อเนื่อง

ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงจัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนและเป็นคู่มือให้กับผู้เรียน โดยเนื้อหาการสอนจริงในห้องเรียนอาจไม่ได้เรียงตรงตามหนังสือทั้งหมด แต่จะมีโครงสร้างหลักตามแผนการสอน 16 สัปดาห์ดังต่อไปนี้ ซึ่งระบุหัวข้อการสอน วิธีพิสูจน์ที่เรียนรู้ และบทที่สอดคล้องกับหนังสือ

สป	หัวข้อหลัก	โฟกัสการให้เหตุผล	กิจกรรมเด่นในห้อง
1	ภาษาและโครงสร้างของพิสูจน์	claim vs reason, legal line, unpack definition	annotate proof, debug ขั้นพื้นฐาน, workshop even/odd
2	Propositional logic ในการพิสูจน์	implication, contrapositive, contradiction, cases	แปลงข้อความให้เข้ารูปพิสูจน์, แก้การใช้ $\Rightarrow/\Leftrightarrow$
3	Quantifiers $\forall/\exists$	โดเมน, การปฏิเสธ, ลำดับตัวบ่งปริมาณ	translate NL$\leftrightarrow$symbols, counterexample จากสลับ $\forall\exists$
4	เซตและฟังก์ชัน	double inclusion, image/preimage	พิสูจน์ความเท่ากันของเซต 2 วิธี, reasoning กับ f^{-1}
		สอบย่อย 1 (ตรรกะการพิสูจน์เบื้องต้น)	
5	Relations/equivalence	RST, class/partition	สร้าง relation แล้วให้เพื่อนหา counterexample
6	Partial orders	minimal vs minimum, DAG thinking	พิสูจน์การมี/ไม่มี minimal element
7	Induction I	template, IH ที่ถูกต้อง	debug induction, เขียน induction สั้น ๆ
8		สัปดาห์สอบกลางภาคของมหาวิทยาลัย	
9	Induction II	strong/structural, recursion correctness	พิสูจน์ความถูกต้องของฟังก์ชันเวียนเกิด
10	Invariants/Monovariants	impossibility, termination	เกม/กระบวนการ: หา invariant
		สอบย่อย 2 (การพิสูจน์ induction และ recursion)	
11	Graphs I	degree, paths, contradiction on graphs	เหตุผลเชิงโครงสร้าง, parity idea
12	Graphs II (Trees)	induction on trees, $\lvert V\rvert - \lvert E\rvert = 1$	พิสูจน์คุณสมบัติต้นไม้ 2 เทคนิค
13	Algorithmic proofs	loop invariant, correctness sketches	วิเคราะห์ pseudocode + invariant
14	Stable matching	termination, stability, optimality	lemma-by-lemma, blocking pair contradiction
		สอบย่อย 3 (การพิสูจน์บน graph และ algorithm อย่างง่าย)	
15	Counting as proof	bijection, pigeonhole, double counting	existence/impossibility ด้วยการนับเชิงเหตุผล
16	Probability as reasoning	events as sets, expectation, probabilistic method (light)	ใช้ความน่าจะเป็นพิสูจน์การมีอยู่
		สอบปลายภาค (ทุกหัวข้อ เน้นทักษะการพิสูจน์ในภาพรวมในหัวข้อที่เกี่ยวกับคอมพิวเตอร์)	

วิชานี้จึงมิได้มีเป้าหมายเพียงให้ผู้เรียนสามารถคำนวณผลลัพธ์ได้ถูกต้องตามสูตรหรืออัลกอริทึมเท่านั้น หากแต่ต้องการให้ผู้เรียนเข้าใจ “เหตุผลเบื้องหลัง” ว่าทำไมวิธีการนั้นจึงถูกต้อง และเงื่อนไขใดที่ทำให้คำตอบสมบูรณ์ การเรียนรู้ในรายวิชา Discrete Mathematics จึงเปรียบได้กับการฝึกคิดอย่างเป็นระบบ ฝึกตั้งคำถาม ฝึกแยกแยะระหว่างสิ่งที่ “เชื่อได้” กับสิ่งที่ “ควรพิสูจน์ให้ได้” การให้เหตุผล (reasoning) จึงเป็นหัวใจสำคัญเหนือการคำนวณ เพราะคณิตศาสตร์ที่แท้จริงไม่ใช่เรื่องของตัวเลข แต่คือศิลปะแห่งความเข้าใจ — ความสามารถในการอธิบาย “ว่าทำไม” สิ่งหนึ่งจึงจริง ไม่ใช่เพียง “ว่าอะไร” เป็นคำตอบที่ถูกต้อง

ด้วยเหตุนี้ ผู้เขียนหวังว่าผู้เรียนจะไม่มองว่าวิชานี้เป็นวิชาแก้โจทย์คณิตศาสตร์เท่านั้น แต่จะเป็นวิชาที่เป็นเหมือนสนามฝึกคิด ฝึกให้เหตุผล และฝึกมองเห็นความงามของตรรกะที่อยู่เบื้องหลังทุกหลักฐาน ทุกสูตร และทุกอัลกอริทึมที่เราจะได้พบตลอดทั้งภาคการศึกษา

Part I

Basic Thinking: Mathematical Thinking, Reasoning, and Proving

Chapter 1

Fundamental of Problem Solving

เราจะเริ่มบทแรกของหนังสือเล่มนี้ด้วยทักษะที่สำคัญที่สุดไม่ว่าจะในการเรียนคณิตศาสตร์ หรือจะคอมพิวเตอร์ก็ตาม นั่นคือทักษะการแก้ปัญหา (problem solving) เพราะแก่นแท้ของตัววิชาเหล่านี้นั้นคือการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ไม่ว่าจะปัญหาในตัววิชาเองในรูปแบบปัญหาเชิงการคำนวณ (computational problem) หรือปัญหาในโลกจริง กล่าวคือ ปัญหาคือสิ่งที่เราจะต้องพบเจอเป็นเรื่องปกติในการเรียนวิชานี้

ในบทนี้เราจะเริ่มจากมาดูกันก่อนว่าปัญหาคืออะไร และการแก้ปัญหาคืออะไร เพราะก่อนจะลงมือแก้ปัญหา เราก็ต้องเข้าใจก่อนว่าสิ่งเหล่านี้คืออะไร หลังจากที่เข้าใจเกี่ยวกับสิ่งที่เรียกว่าปัญหาแล้ว เราจะมาต่อกันว่าทักษะหรือแนวคิดอะไรบ้างที่สำคัญในการแก้ปัญหา โดยจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดปลีกย่อยของเทคนิคการแก้ปัญหา เพราะในแต่ละรูปแบบปัญหาที่ต่างกัน ก็จะมีรายละเอียดในเรื่องวิธีการแก้ปัญหาหรือเทคนิคการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันออกไป เหมือนการทำโจทย์คณิตศาสตร์ที่รูปแบบโจทย์ที่แตกต่างกันก็อาจจะมีเทคนิคที่แตกต่างกัน แต่ว่าสิ่งที่จะทำให้เรารู้ว่าต้องใช้เทคนิคหรือวิธีการอะไรในการแก้ปัญหาที่ต้องการแก้ก็คือประสบการณ์ที่เราจะได้ฝึกกันในแต่ละบท ๆ ต่อจากนี้นั่นเอง

1.1 Problem Solving คืออะไร

ก่อนจะถามว่าการแก้ปัญหาคืออะไร ก็คงไม่เสียเวลาอะไรนักถ้าเราจะมาพูดคุยตกลงกันให้เข้าใจก่อนว่า อะไรคือ**ปัญหา** ซึ่งถ้าเราเปิดดูความหมายตามราชบัณฑิต คำนี้จะมีความหมายว่า

> น. ข้อสงสัย, ข้อขัดข้อง, เช่น ทำได้โดยไม่มีปัญหา, คำถาม, ข้อที่ควรถาม, เช่น ตอบปัญหา, ข้อที่ต้องพิจารณาแก้ไข เช่น ปัญหาเฉพาะหน้า ปัญหาทางการเมือง.

ซึ่งบางความหมาย อาจจะรู้สึกว่าปัญหาก็คืออะไรที่รู้สึกว่าไม่ดี เพราะจะทำให้สิ่งต่าง ๆ ดำเนินไปไม่เป็นไปตาม

ที่ควรจะเป็น เช่นข้อขัดข้อง หรือข้อที่ต้องพิจารณาแก้ไข ทว่ายังมีความหมายอีกกลุ่มหนึ่งที่ดูน่าสนใจคือ ข้อสงสัย ข้อควรถาม ที่เรามักพูดกันว่า “ตอบปัญหา”

ในหนังสือเล่มนี้ (และในคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์) เราจะให้ความหมายของ **ปัญหา** คือ *โจทย์ที่ถามหรือกล่าวขึ้นมาเพื่อต้องการคำตอบโดยอาจจะมีเงื่อนไขบางอย่างหรือไม่มีก็ได้ โดยจะเป็นการกล่าวถึงสถานการณ์ที่มีสิ่งตั้งต้นอะไรสักอย่าง แล้วสุดท้าย(หลังจากผ่านกระบวนการอะไรสักอย่าง)จะได้สิ่งที่ต้องการออกมา*

ตัวอย่างเช่น “บริษัทจัดสรรแม่บ้านทำความสะอาดตามสั่งแห่งหนึ่งได้รับการจองคิวใช้บริการแม่บ้านเข้ามาจำนวนหนึ่งจากลูกค้าหลายราย โดยที่ลูกค้าแต่ละคนก็มีจำนวนวันที่ต้องการใช้บริการแม่บ้านไม่เหมือนกัน ทางบริษัทเลยอยากรู้ว่าต้องเตรียมแม่บ้านไว้กี่คน” ซึ่งเราจะพบว่าปัญหานี้เราต้องการรู้ว่าต้องเตรียมแม่บ้านไว้กี่คน โดยเรามีรายการการจองคิวเป็นตัวตั้งของการตอบปัญหานี้

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเรียกสิ่งตั้งต้น (เช่นรายการการจองคิวที่บริษัทได้รับ) ว่า**ข้อมูลขาเข้า** (input) และเราจะเรียกสิ่งที่ได้ออกมา (เช่นจำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้) ว่า**ข้อมูลขาออก** (output) ดังนั้น เราอาจจะกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่าปัญหาก็คือการมีข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออกที่ต้องการ และสิ่งที่เราต้องลงแรงหาก็คือ วิธีการที่จะแปลเปลี่ยนข้อมูลขาเข้าดังกล่าวให้ได้ข้อมูลขาออกตามที่ต้องการ ซึ่งเราจะเรียกกระบวนการการหาวิธีการดังกล่าวว่า**การแก้ปัญหา** (problem solving) และจะเห็นว่าสิ่งสำคัญอันดับแรกสุดไม่ว่าเราจะแก้ปัญหาอะไรก็ตามคือการทำความเข้าใจภาพรวมของโจทย์ (problem statement) ว่าตัวปัญหาคืออะไร และระบุให้ได้ว่าอะไรคือข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออก โดยถ้าเทียบกับตัวอย่างบริษัทแม่บ้านทำความสะอาดก่อนหน้า จะมีรายละเอียดดังนี้

- **โจทย์**: หาวิธีการในการคำนวณจำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้เมื่อได้รับรายการการจองคิวใช้บริการจากลูกค้า
- **ข้อมูลขาเข้า**: รายการการจองคิวใช้บริการ
- **ข้อมูลขาออก**: จำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้

ทั้งนี้ ตัวปัญหาเองก็อาจจะถูกแบ่งกลุ่มออกเป็นประเภทต่าง ๆ ได้หลายประเภท แต่ปัญหาที่เราจะสนใจกันในหนังสือเล่มนี้นั้นจะเป็นปัญหาในกลุ่ม**ปัญหาเชิงการคำนวณ** (computational problem) หรือหนังสือบางเล่มจะเรียกว่าปัญหาเชิงการประมวลผล ซึ่งคำว่าคำนวณในที่นี่ไม่ได้หมายถึงเพียงแค่การบวก ลบ คูณ หาร หรือการทำโจทย์คณิตศาสตร์ (calculation) แต่ยังรวมไปถึงการวางแผนเชิงกระบวนการ เชิงตรรกะ เชิงเหตุผล หรือรวมไปถึงการคิดเชิงสัญลักษณ์เองก็ด้วย ไม่จำเป็นว่าจะต้องเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับตัวเลขเพียงเท่านั้น ซึ่งกระบวนการการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณถือว่าเป็นทักษะที่สำคัญที่สุดในการเขียนโปรแกรม รวมไปถึงการศึกษาคณิตศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ โดยเราจะได้กล่าวถึงรายละเอียดของกระบวนการดังกล่าวในหัวข้อถัดไป

1.2 การแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ

จากหัวข้อที่แล้ว เราอาจกล่าวโดยสรุปได้ว่าปัญหาเชิงการคำนวณก็คือปัญหาที่จะสามารถแก้ได้ด้วยคอมพิวเตอร์ โดยการออกแบบอัลกอริทึมที่เหมาะสม และในการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณนั้น จะมีทักษะที่สำคัญที่จะช่วยให้เราแก้ปัญหาเชิงการคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพอยู่ 4 ทักษะได้แก่

1. การแบ่งย่อยปัญหา (decomposition)
2. การเข้าใจรูปแบบ (pattern recognition)
3. การคิดเชิงนามธรรม (abstraction)
4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm design)

1.2.1 การแบ่งย่อยปัญหา (decomposition)

ในการแก้ปัญหาหนึ่งที่เราได้รับมานั้น อาจเป็นการยากถ้าเราจะหาวิธีที่แปลงข้อมูลขาเข้าให้กลายเป็นข้อมูลขาออกได้ภายในขั้นเดียว อาจจะเนื่องมาจากการแก้ปัญหาดังกล่าวต้องการขั้นตอนย่อย ๆ หรือเครื่องมือย่อย ๆ ในการแก้ปัญหานั้น ดังนั้นเราจึงควรย่อยปัญหาใหญ่ที่ซับซ้อนให้ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะสามารถแก้ได้ง่าย ๆ ไม่ซับซ้อนก่อน

ตัวอย่างเช่นเราอยากจะต่อจิกซอว์สักรูปหนึ่ง คงเป็นการยากถ้าเราจะเทจิกซอว์ทั้งหมดลงมาในแผ่นเดียว แล้วต่อขึ้นมาด้วยการมองภาพทั้งภาพในเวลาเดียวกัน แต่คงจะดีขึ้นถ้าเรารู้ว่าในภาพมีองค์ประกอบย่อย ๆ ที่เห็นความแตกต่างเรื่องสีอย่างชัดเจน เช่นมีบริเวณหนึ่งที่มีแต่สีแดง และมีอีกบริเวณหนึ่งที่มีแต่สีเขียว หรืออีกบริเวณหนึ่งเป็นลายผ้าสีเหลืองลายจุดสีส้ม เราก็เลยจะแบ่งปัญหาการต่อจิกซอว์ทั้งผืนเป็นปัญหาการต่อจิกซอว์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีแดง, ปัญหาการต่อจิกซอว์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีเขียว และ ปัญหาการต่อจิกซอว์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีเหลืองลายจุดสีส้ม ซึ่งจะทำให้เกิดปัญหาที่เล็กลงและอาจจะซับซ้อนน้อยลงเพราะเรากำจัดตัวเลือกจิกซอว์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับบริเวณดังกล่าวออกไปได้เยอะ

ขออีกสักตัวอย่างที่ดูเป็นปัญหาเชิงการคิดเลขมากขึ้น เช่นปัญหาการแก้สมการจำนวนเต็ม $x + y + 12z = 30$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่ต่างกัน โดยโจทย์ต้องการว่ามีผลเฉลย (x, y, z) ดังกล่าวทั้งหมดกี่ครูปแบบ ซึ่งแน่นอนว่าถ้าเราไล่ไปเรื่อย ๆ ก็อาจจะเสร็จได้ไม่ได้ยากมาก เพราะเลขเราต้องการผลบอกแค่ 30 ถ้าต้องไล่ 0 ถึง 30 ก็มีอยู่ไม่เกิน $31 \times 31 \times 31 = 29791$ รูปแบบ ซึ่งถ้าให้คอมพิวเตอร์ช่วยรันให้ก็คงใช้เวลาไม่นาน แต่ถ้าใช้คนก็อาจจะเหนื่อยก่อนและมีคิดผิดบ้างได้ แต่เราจะเห็นว่าการเพิ่มขึ้นของค่า z นั้นกลับมีประโยชน์อย่างมาก เพราะเพิ่มขึ้น 1 ค่าในด้านซ้ายจะเพิ่มขึ้นไปถึง 12 ดังนั้นเราจึงอาจจะสังเกตได้ไม่ยากว่าแยกพิจารณาตามค่า z ไปเลยก็ได้ โดยที่ $z = 0, 1, 2$ (เพราะถ้ามากกว่านี้ ผลบวกจะเกิน 30) กล่าวคือ เราจะแยกปัญหาหลักเราออกเป็นปัญหาย่อย 3 ปัญหาย่อยคือ

1. เมื่อ $z = 0$: แก้สมการ $x + y = 30$
2. เมื่อ $z = 1$: แก้สมการ $x + y = 18$
3. เมื่อ $z = 2$: แก้สมการ $x + y = 6$

ซึ่งแต่ละปัญหาย่อย จะสามารถแก้ได้ด้วยการนับง่าย ๆ

ในการแยกปัญหาย่อยนั้น อาจจะได้ปัญหาย่อยมาในรูปแบบที่แยกกันทำ ต่างคนต่างอิสระจากกัน ทำเสร็จแล้วค่อยนำคำตอบของแต่ละปัญหามาผนวกรวมร่างกันให้กลายเป็นปัญหาใหญ่ เช่นตัวอย่างสมการข้างต้นที่เราสามารถแก้ปัญหาไหนก่อนก็ได้ไม่มีผลต่อกัน หรือเราอาจจะได้ปัญหาย่อยที่มาในรูปแบบที่ต้องทำงานต่อเนื่องกันโดยที่เมื่อทำปัญหาย่อยที่ 1 เสร็จให้นำผลของปัญหาย่อยที่ 1 ไปใช้ต่อเป็นข้อมูลขาเข้าของปัญหาย่อยที่ 2 ก็ได้ ทั้งนี้ ไม่มีกฎตายตัวในการตั้งปัญหาย่อย ขึ้นอยู่กับมุมมองต่อปัญหาตรงหน้าของเรา ณ เวลานั้น

อีกตัวอย่างที่อาจจะใกล้ตัวมากขึ้น เช่นเรากำลังจะพัฒนาระบบ web application การจัดการคะแนนนักเรียนในรายวิชา ซึ่งถ้ามองแต่ปัญหาภาพใหญ่ เราอาจจะวางแผนไม่ได้หรือไม่ตรงเป้าหมาย หรือภาษาชาวบ้านจะเรียกว่า คิดอะไรจนฟุ้งมากเกินไป เราจึงต้องเริ่มจากการมาดูกันก่อนว่าระบบของเราควรมีระบบย่อยอะไรบ้าง เช่นต้องมี (1) ส่วนคำนวณเกรดเฉลี่ย (2) ส่วนตรวจสอบเกรด และ (3) ส่วนแสดงผลรายงาน ซึ่งทำให้เราสามารถโฟกัสไปทีละส่วนได้ หรืออาจจะแบ่งงานกันทำคนละส่วนไปพร้อม ๆ กัน และเมื่อแก้ปัญหาเสร็จทุกส่วน เราก็จะสามารถนำมาประกอบเข้าด้วยกันจนเป็นระบบสมบูรณ์ได้

1.2.2 การเข้าใจรูปแบบ (pattern recognition)

อีกทักษะคือการสังเกตรูปแบบของสิ่งที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น การเข้าใจรูปแบบหมายถึงความสามารถในการมองเห็นความคล้ายคลึง ความซ้ำ หรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ ในปัญหาที่เรากำลังเผชิญ ซึ่งจะช่วยให้เรามองเห็นแนวทางแก้ไขที่ง่ายขึ้นหรือสามารถนำแนวทางเดิมมาใช้ซ้ำได้กับปัญหาใหม่ที่มีโครงสร้างใกล้เคียงกัน

ลองนึกภาพว่าเรากำลังหัดเล่นหมากรุก ในตอนแรกเราอาจจะเดินหมากไปเรื่อย ๆ ตามสัญชาตญาณ แต่เมื่อเล่นไปหลายตา เราจะเริ่มสังเกตเห็นรูปแบบบางอย่าง เช่น ถ้าเราเคยใช้ม้ากับเรือบีบมุมจนอีกฝ่ายหนีไม่ได้ รูปแบบนั้นอาจจะเกิดซ้ำได้อีกในเกมถัดไป การเข้าใจรูปแบบนี้ทำให้เราสามารถวางแผนล่วงหน้าได้ และลดการคิดซ้ำในสถานการณ์ที่คล้ายกัน — นั่นคือหัวใจของการเข้าใจรูปแบบในเชิงคำนวณ

ในโลกของคณิตศาสตร์ เราเองก็ใช้ทักษะนี้อยู่เสมอ เช่น เมื่อเราเห็นลำดับตัวเลข $2, 4, 6, 8, \ldots$ เราอาจสังเกตได้ทันทีว่าเป็นลำดับเลขคู่อย่างง่าย หรือหากเราเห็น $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ เราก็รู้ว่าเป็นลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci sequence) ซึ่งการรู้จักรูปแบบนี้ช่วยให้เราทำนายพฤติกรรมหรือค่าต่อไปได้โดยไม่ต้องเริ่มจากศูนย์ทุกครั้ง นี่เองคือแก่นของการคิดเชิงแบบแผน (pattern thinking)

ในเชิงการเขียนโปรแกรม เรามักเจอปัญหาที่มีรูปแบบซ้ำ เช่น การวนลูป (loop) การตรวจสอบเงื่อนไข (if-else) หรือการคำนวณผลรวมของข้อมูลหลายค่า ปัญหา "หาผลรวมของจำนวนคู่ทั้งหมดในรายการ" และ "หาผลรวมของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว" ดูเหมือนต่างกัน แต่จริง ๆ แล้วมีรูปแบบเดียวกันคือ "การวนลูปและตรวจสอบเงื่อนไขก่อนบวกผลรวม" ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนโปรแกรมเดียวกันใช้แก้ปัญหาทั้งสองได้ เพียงแค่เปลี่ยนเงื่อนไขภายในเล็กน้อย

เพื่อให้เห็นภาพเชิงคณิตศาสตร์ ลองพิจารณาปัญหาง่าย ๆ ดังนี้: "หาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 50 ทั้งหมดที่เป็นผลคูณของ 3 หรือ 5" ถ้าเราไล่ไปทีละจำนวนจะยุ่งยากมาก แต่ถ้าเราสังเกตเห็นรูปแบบว่า "ทุกจำนวนที่เป็น 3, 6, 9, 12, ..." และ "ทุกจำนวนที่เป็น 5, 10, 15, 20, ..." เราก็สามารถหาคำตอบได้โดยการหาลำดับเลขคูณของ 3 และ 5 แล้วนำมารวมกัน โดยไม่ต้องตรวจสอบทีละจำนวน ซึ่งนี่คือการใช้ pattern recognition ช่วยลดภาระการคำนวณอย่างชัดเจน

ทักษะนี้ยังสำคัญอย่างยิ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง (discrete mathematics) เพราะเราจะพบกับรูปแบบในโครงสร้างข้อมูล เช่น กราฟ (graph) ที่มีลักษณะซ้ำกัน หรือรูปแบบของฟังก์ชันบูลีน (boolean function) ที่มีโครงสร้างเหมือนกันบางส่วน การมองเห็นรูปแบบเหล่านี้ทำให้เราสามารถพิสูจน์ทั่วไปได้ง่ายขึ้น เช่น การพิสูจน์โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ก็ถือเป็นการมองหาความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบในแต่ละขั้นของปัญหานั่นเอง

กล่าวโดยสรุป การเข้าใจรูปแบบคือการฝึก "สายตาเชิงคำนวณ" ให้เห็นสิ่งที่ซ้ำอยู่ในความซับซ้อนของข้อมูล เมื่อเรามองเห็น pattern ได้ดี เราก็สามารถสร้างอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพและยืดหยุ่น ใช้แก้ปัญหาได้หลากหลายโดยไม่ต้องเริ่มใหม่ทุกครั้ง และนั่นคือสิ่งที่ทำให้นักคณิตศาสตร์และนักคอมพิวเตอร์สามารถสร้างสรรค์สิ่งใหม่ได้จากสิ่งที่มีอยู่เดิม

1.2.3 การคิดเชิงนามธรรม (abstraction)

ในชีวิตประจำวันของเรา เรามักจะต้องจัดการกับข้อมูลหรือสิ่งต่าง ๆ ที่มีรายละเอียดมากมาย เช่น ถ้าเราจะขับรถไปทำงาน เราไม่จำเป็นต้องคิดถึงแรงเสียดทานระหว่างยางกับถนน หรือการระเหยของน้ำมันในถัง เราเพียงแค่คิดถึง "รถ" ในฐานะสิ่งหนึ่งที่เมื่อบิดกุญแจแล้วสามารถพาเราไปถึงจุดหมายได้ ซึ่งในทางหนึ่งนี่ก็คือการ "คิดเชิงนามธรรม" — การละรายละเอียดปลีกย่อยที่ไม่จำเป็นออก แล้วมองภาพรวมของสิ่งที่เราสนใจเท่านั้น

ในทางคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์ การคิดเชิงนามธรรม (abstraction) หมายถึงการลดความซับซ้อนของปัญหาหรือข้อมูล โดยมองเฉพาะ "คุณลักษณะสำคัญ" ที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหานั้น ตัวอย่างเช่น เมื่อเรากำลังออกแบบโปรแกรมจัดการ "บัญชีผู้ใช้" เราไม่จำเป็นต้องรู้ว่าข้อมูลจริงถูกเก็บอยู่ในฐานข้อมูลแบบใด (เช่น SQL หรือ NoSQL) แต่เราสามารถมองว่า "ผู้ใช้" (user) คือวัตถุหนึ่งที่มีคุณสมบัติพื้นฐาน เช่น ชื่อผู้ใช้ รหัสผ่าน และสิทธิ์การใช้งาน การคิดเชิงนามธรรมในกรณีนี้ช่วยให้เราโฟกัสไปที่โครงสร้างและความสัมพันธ์ของข้อมูล มากกว่าการลงรายละเอียดในเชิงเทคนิค

ในแง่ของคณิตศาสตร์ เราก็ใช้การนามธรรมอยู่เสมอ เช่น เมื่อเราศึกษา “จำนวนจริง” เราไม่ได้สนใจว่าจะเขียนเลขนั้นในรูปทศนิยมหรือเศษส่วน แต่เรามองมันในฐานะ “วัตถุเชิงนามธรรม” ที่มีสมบัติพื้นฐาน เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร หรือเมื่อเราศึกษา “กราฟ (graph)” ในคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง เราไม่ได้สนใจว่าจุดยอดเหล่านั้นแทนคน เมือง หรือคอมพิวเตอร์ แต่เรามองเฉพาะ “ความสัมพันธ์” ระหว่างจุดยอดและเส้นเชื่อม เพื่อทำให้เราสามารถวิเคราะห์โครงสร้างเชิงนามธรรมได้โดยไม่ต้องผูกกับบริบทใดบริบทหนึ่ง

เพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจน ลองดูปัญหาต่อไปนี้: “เราต้องการออกแบบโปรแกรมคำนวณผลรวมของราคาสินค้าในตะกร้าออนไลน์” หากเราเก็บข้อมูลสินค้าในลิสต์ เช่น ‘[(‘ดินสอ’, 10), (‘ปากกา’, 15), (‘สมุด’, 20)]‘ เราไม่จำเป็นต้องสนใจว่าราคามาจากแบรนด์ไหนหรือผลิตที่ใด เราสนใจเพียงว่ามันมี “ชื่อ” และ “ราคา” เท่านั้น ดังนั้นเราสามารถเขียนโปรแกรมแบบนามธรรมได้ว่า

```
total = 0
for item in cart:
total += item.price
```

ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้ได้กับสินค้าทุกประเภท — จะเป็นของกิน ของใช้ หรือบริการ ก็สามารถใช้โครงสร้างเดียวกันได้ทั้งหมด เพราะเรานามธรรม “สินค้า” ให้เหลือเพียงแค่ “สิ่งที่มีราคา”

การคิดเชิงนามธรรมจึงเป็นทักษะที่สำคัญอย่างยิ่งในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการออกแบบโปรแกรม เพราะมันทำให้เราเห็น “แบบจำลองของปัญหา” (model) ที่สามารถนำกลับมาใช้ซ้ำได้โดยไม่ต้องออกแบบใหม่ทุกครั้ง ทั้งยังเป็นรากฐานของแนวคิดการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object-oriented programming) และการออกแบบระบบเชิงโมดูลาร์ (modular design) อีกด้วย

1.2.4 การออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm design)

เมื่อเรามีการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วนย่อย เข้าใจรูปแบบ และนามธรรมสิ่งต่าง ๆ ให้อยู่ในระดับโครงสร้างแล้ว ขั้นตอนสุดท้ายของการแก้ปัญหาทางเชิงคำนวณก็คือการ “ออกแบบขั้นตอนวิธี” หรือที่เราเรียกกันว่า *algorithm design* ซึ่งหมายถึงการกำหนดลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจนในการแก้ปัญหาให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

ในทางคณิตศาสตร์ เราอาจคุ้นเคยกับการเขียนลำดับของการคิด เช่น “เริ่มจากสมมติว่า..., จากนั้น..., ดังนั้น...” ซึ่งก็ไม่ต่างอะไรกับอัลกอริทึมในคอมพิวเตอร์เลย เพียงแต่ในโลกของการเขียนโปรแกรม เราต้องทำให้ทุกขั้นตอนนั้นสามารถสั่งให้คอมพิวเตอร์ทำงานได้โดยไม่คลุมเครือ ตัวอย่างเช่น ถ้าโจทย์คือ “หาค่ามากที่สุดในลิสต์ของตัวเลข” เราอาจออกแบบขั้นตอนวิธีดังนี้

1. กำหนดให้ตัวแปร `max` เท่ากับค่าตัวแรกของลิสต์
2. วนลูปตรวจสอบค่าทุกตัวในลิสต์

3. ถ้าค่าปัจจุบันมากกว่า `max` ให้แทนที่ค่า `max` ด้วยค่านั้น
4. เมื่อจบลูป ค่าของ `max` จะเป็นค่าที่มากที่สุด

และเราสามารถแปลงขั้นตอนนี้เป็นโค้ดภาษา Python ได้ตรงไปตรงมา

```
def find_max(numbers):
max_val = numbers[0]
for n in numbers:
if n > max_val:
max_val = n
return max_val
```

อัลกอริทึมนี้แม้จะดูเรียบง่าย แต่สะท้อนให้เห็นการคิดเชิงตรรกะและการวางลำดับขั้นตอนอย่างเป็นระบบ ซึ่งเป็นพื้นฐานของทุกกระบวนการคำนวณ — ตั้งแต่การเรียงข้อมูล (sorting) ไปจนถึงการค้นหาเส้นทางสั้นที่สุดในกราฟ (shortest path in a graph)

ในทางคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง การออกแบบอัลกอริทึมมักเชื่อมโยงกับการใช้หลักตรรกศาสตร์เชิงนิรนัย เช่น การพิสูจน์ว่าขั้นตอนดังกล่าว "ถูกต้องทุกกรณี" หรือ "ให้คำตอบที่ดีที่สุด" ตัวอย่างเช่น อัลกอริทึม Dijkstra สำหรับหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟนั้นอาศัยแนวคิดของการเลือกโหนดที่มีระยะทางต่ำที่สุดที่ยังไม่ถูกเยี่ยมชม ซึ่งเป็นการใช้ตรรกะคณิตศาสตร์ควบคู่กับการออกแบบเชิงลำดับ

เพื่อเห็นภาพในชีวิตจริง สมมติว่าเราต้องการ "จัดลำดับการทำงานของเครื่องจักรในโรงงานให้ใช้เวลาน้อยที่สุด" เราอาจเริ่มจากการนามธรรม "งานแต่ละชิ้น" ให้เป็น "ข้อมูล" ที่มีค่าเวลา และ "เครื่องจักร" ให้เป็น "ตัวประมวลผล" จากนั้นจึงออกแบบขั้นตอนวิธี เช่น "เลือกงานที่ใช้เวลาน้อยที่สุดก่อน" (shortest job first) ซึ่งเป็นหนึ่งในอัลกอริทึมที่ใช้ในระบบปฏิบัติการจริง ๆ ของคอมพิวเตอร์

ดังนั้น การออกแบบขั้นตอนวิธีไม่ใช่เพียงการเขียนโค้ดตามลำดับ แต่คือการแปลงความคิดเชิงตรรกะให้กลายเป็น "ภาษาที่เครื่องเข้าใจได้" และยังต้องพิจารณาประสิทธิภาพของมันในแง่เวลาและทรัพยากร เช่น ถ้าอัลกอริทึมหนึ่งทำงานในเวลา $O(n^2)$ แต่อีกอันทำงานในเวลา $O(n \log n)$ เราก็สามารถใช้คณิตศาสตร์ช่วยพิสูจน์ได้ว่าอันหลังมีประสิทธิภาพดีกว่าในกรณีข้อมูลขนาดใหญ่

กล่าวโดยสรุป การออกแบบขั้นตอนวิธีคือจุดเชื่อมระหว่าง "การคิดเชิงคณิตศาสตร์" กับ "การเขียนโปรแกรมเชิงคอมพิวเตอร์" — เป็นศิลปะแห่งการทำให้ความคิดกลายเป็นสิ่งที่คอมพิวเตอร์ทำได้จริง

บทสรุปและความเชื่อมโยงสู่ Discrete Mathematics

จากทั้งสี่ทักษะของการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ — *decomposition, pattern recognition, abstraction* และ *algorithm design* — เราจะเห็นภาพเดียวกันคือ การทำให้ปัญหาซับซ้อนกลายเป็นสิ่งที่คิดได้เป็นขั้นเป็นตอน ตรวจสอบได้ และพิสูจน์ได้ นี่เองคือเหตุผลว่าทำไมการเริ่มต้นวิชานี้ด้วย "ทักษะการแก้ปัญหา" จึงสำคัญ เพราะสิ่งที่เราจะเรียนต่อไปใน **Discrete Mathematics** คือภาษากลางและกรอบคิดทางคณิตศาสตร์ที่รองรับทักษะทั้งสี่ให้แข็งแรงและนำไปใช้ได้จริง

- **Decomposition** เชื่อมโดยตรงกับแนวคิด *โมดูลาร์* และ *การนิยามแบบเกิดซ้ำ* (recursion): เมื่อเราแตกโจทย์เป็นส่วนย่อย เราจะอธิบายส่วนย่อยเหล่านั้นด้วยนิยามและคุณสมบัติที่ชัดเจน ซึ่งในวิชาดิสครีตจะรองรับด้วย **ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์/เชิงภาคนิพจน์** สำหรับระบุเงื่อนไขอย่างเป็นทางการ และใช้ **อุปนัยทางคณิตศาสตร์** พิสูจน์ความถูกต้องของการประกอบส่วนย่อยกลับเป็นคำตอบทั้งก้อน

- **Pattern Recognition** ทำให้เราเห็นโครงสร้างซ้ำ เช่น ลำดับ ความสัมพันธ์ซ้ำ และรูปแบบบนกราฟ สิ่งเหล่านี้สอดคล้องกับหัวข้อ **ลำดับและความสัมพันธ์เกิดซ้ำ (recurrences)**, **การนับแบบจัดวิธี (combinatorics)**, และ **ทฤษฎีกราฟ** ซึ่งให้ทั้งเครื่องมือคาดคะเนพฤติกรรม (เช่น สูตรปิด) และวิธีวิเคราะห์โครงสร้างที่ซ่อนอยู่ในปัญหา

- **Abstraction** คือหัวใจของดิสครีต: เราแทนโลกจริงด้วย **เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน กราฟ ต้นไม้ และโครงสร้างเชิงพีชคณิตอย่างง่าย** เพื่อตัดรายละเอียดที่ไม่จำเป็นและเก็บเฉพาะสมบัติสำคัญ การนามธรรมเช่นนี้ทำให้แบบจำลองหนึ่งนำไปใช้ซ้ำในหลายบริบท และเปิดทางให้เราใช้เครื่องมือพิสูจน์เชิงตรรกะได้ตรงไปตรงมา

- **Algorithm Design** ต้องการทั้ง *ความถูกต้อง* และ *ประสิทธิภาพ*: ดิสครีตให้เครื่องมือพิสูจน์ความถูกต้องด้วย **ตรรกะ, อินวาเรียนต์, อุปนัย** และช่วยวิเคราะห์ประสิทธิภาพด้วย **การเติบโตของฟังก์ชัน, บิ๊กโอ, การแก้สมการเวียนเกิด (recurrence)** ตลอดจนแบบจำลองข้อมูลเชิงโครงสร้าง (เช่น กราฟ/ทรี) ที่อัลกอริทึมทำงานอยู่บนนั้น

กล่าวโดยสรุป **Discrete Mathematics** ทำหน้าที่เป็น "ไวยากรณ์และกฎหมายของการคิดเชิงคำนวณ":

1. ให้ *ภาษาอย่างเป็นทางการ* (ตรรกะ สัญลักษณ์ นิยาม) เพื่อระบุปัญหา เงื่อนไข และเป้าหมายให้ไม่คลุมเครือ
2. ให้ *แบบจำลองเชิงนามธรรม* (เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน กราฟ ต้นไม้) เพื่อยกระดับปัญหาให้อยู่ในโครงสร้างที่วิเคราะห์ได้

3. ให้ *วิธีพิสูจน์* (อินดักชัน อินวาเรียนต์ การโต้แย้งแบบหักล้าง ฯลฯ) เพื่อรับรองความถูกต้องของวิธีแก้
4. ให้ *เครื่องมือวิเคราะห์ประสิทธิภาพ* (การนับ บิ๊กโอ รีเคอเรนซ์ ความน่าจะเป็นพื้นฐาน) เพื่อประเมินความคุ้มค่าของอัลกอริทึม

ดังนั้น บทถัดไปของหนังสือนี้จะค่อย ๆ วางรากฐานองค์ประกอบเหล่านั้นอย่างเป็นลำดับ เริ่มจากภาษาตรรกะและวิธีพิสูจน์ ไปสู่เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การนับ ทฤษฎีกราฟ และการวิเคราะห์อัลกอริทึม เพื่อให้นักศึกษาสามารถ *นิยามปัญหาให้ชัดเจน*, *สร้างแบบจำลองที่เหมาะสม*, *ออกแบบวิธีแก้*, *พิสูจน์ความถูกต้อง*, *และประเมินประสิทธิภาพ* ได้ครบถ้วน อันเป็นหัวใจของทั้งการเรียนคณิตศาสตร์เชิงไม่ต่อเนื่องและการพัฒนาซอฟต์แวร์เชิงวิทยาการคอมพิวเตอร์อย่างแท้จริง

1.3 แบบฝึกหัด: การวิเคราะห์ปัญหาเชิงการคำนวณ

วัตถุประสงค์ของใบงาน: ให้นักศึกษาได้ฝึกคิดและลงมือแก้ปัญหาจริง โดยใช้ทั้ง 4 ทักษะของการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ ได้แก่ *(1) การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition) (2) การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition) (3) การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction)* และ *(4) การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)*

แบบฝึกหัดที่ 1: ปัญหาการจัดตารางรถรับส่งนักเรียน

สถานการณ์: โรงเรียนแห่งหนึ่งมีบริการรถรับส่งนักเรียน โดยมีนักเรียนทั้งหมด 50 คนที่พักอยู่ในละแวกต่าง ๆ รอบโรงเรียน รถแต่ละคันสามารถรับนักเรียนได้ไม่เกิน 10 คนต่อรอบ และโรงเรียนต้องการให้รถแต่ละคันรับส่งนักเรียนที่อยู่ใกล้กันเพื่อลดระยะทางรวมของการเดินทางลงให้มากที่สุด โรงเรียนมีข้อมูลที่อยู่ของนักเรียนทุกคนในรูปพิกัด (x, y) โดยโรงเรียนอยู่ที่จุด $(0, 0)$

จงวิเคราะห์และเขียนแนวทางการแก้ปัญหานี้ โดยอาศัยทั้ง 4 ทักษะต่อไปนี้:

1. การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition)

คำถามชี้นำ:

- ปัญหานี้สามารถแยกออกเป็นปัญหาย่อยอะไรได้บ้าง?
- แต่ละส่วนต้องแก้ไขอะไร และผลของแต่ละส่วนจะนำมารวมกันอย่างไร?

2. การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition)

คำถามชี้นำ: - จากข้อมูลนักเรียน 50 คน มีรูปแบบหรือความสัมพันธ์อะไรบ้างที่เราสามารถใช้ประโยชน์ได้? - มีเงื่อนไขที่ซ้ำ ๆ หรือโครงสร้างที่คล้ายกันในทุกกลุ่มหรือไม่?

3. การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction)

คำถามชี้นำ: - ถ้าจะนามธรรมปัญหานี้ให้อยู่ในรูปของคณิตศาสตร์หรือคอมพิวเตอร์ จะมองว่าอะไรคือ "วัตถุ (object)" และอะไรคือ "ความสัมพันธ์ (relation)" ? - ปัญหานี้คล้ายกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ใดที่เคยรู้จัก (เช่น กราฟ, การจัดกลุ่ม, เส้นทางสั้นที่สุด เป็นต้น)?

4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)

คำถามชี้นำ: - หากต้องให้คอมพิวเตอร์ช่วยแก้ปัญหานี้ ควรกำหนดขั้นตอนการทำงานอย่างไร (ลำดับของการคำนวณหรือการตัดสินใจ)? - จะใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์หรือโครงสร้างข้อมูลใดในการคำนวณ เช่น การจัดกลุ่ม (clustering) หรือการหาทางสั้นที่สุด (shortest path)?

แบบฝึกหัดที่ 2: ปัญหาการเรียงเหรียญ (Coin Arrangement Problem)

สถานการณ์: ให้เหรียญ 3 ชนิดคือ เหรียญ 1 บาท, 2 บาท, และ 5 บาท อย่างละไม่จำกัดจำนวน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเรียงเหรียญเหล่านี้ให้ได้ผลรวมของมูลค่าเท่ากับ 20 บาท โดยลำดับของเหรียญถือว่ามีความสำคัญ (เช่น (5,5,10) และ (10,5,5) ถือเป็นวิธีต่างกัน)

ให้นักศึกษาวิเคราะห์ปัญหานี้ โดยใช้แนวทางของ 4 ทักษะการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ:

1. การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition)

คำถามชี้นำ: - สามารถแยกปัญหานี้เป็นกรณีย่อย ๆ ได้อย่างไร? - การแบ่งย่อยช่วยให้เราสามารถนิยามฟังก์ชันหรือสมการใดได้บ้าง?

2. การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition)

คำถามชี้นำ: - เมื่อคำนวณจำนวนวิธีในกรณีเล็ก ๆ เช่น 5 บาท, 10 บาท, 15 บาท เห็นรูปแบบใดเกิดขึ้นบ้าง? - รูปแบบนั้นช่วยให้เราคาดเดาสูตรหรือความสัมพันธ์ทั่วไปได้อย่างไร?

3. การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction)

คำถามชี้นำ: - จะเขียนปัญหานี้ให้อยู่ในรูปของสมการเวียนเกิด (recurrence relation) ได้หรือไม่? - ถ้ามองในเชิง combinatorics หรือ discrete structure ปัญหานี้อยู่ในหมวดใด?

4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)

คำถามชี้นำ: - สามารถออกแบบอัลกอริทึมเพื่อคำนวณจำนวนวิธีได้อย่างไร? - จะเลือกใช้แนวทางใดระหว่าง recursive กับ dynamic programming เพราะเหตุใด?

คำถามสะท้อนท้ายใบงาน:

- เมื่อเพิ่มเหรียญชนิดใหม่มูลค่า 10 บาท จะต้องปรับสมการเวียนเกิดอย่างไร?

Chapter 2

Mathematics as a Language

บทนี้จะเป็นบทสั้น ๆ เน้นที่การเล่าให้เห็นภาพรวมของคณิตศาสตร์ในรูปแบบการเรียนเพื่อหาเหตุผล เป้าหมายของบทนี้เพียงเพื่อต้องการเปลี่ยนทัศนคติของผู้อ่านบางท่านเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ก่อนที่เราจะลงลึกไปสู่คณิตศาสตร์จริง ๆ ในบทถัด ๆ ไป อย่างน้อยก็อยากให้หลังจากที่อ่านบทนี้จบ ผู้อ่านจะมองว่าคณิตศาสตร์คือวิชาของการอธิบายสิ่งต่าง ๆ ในโลก และการให้เหตุผลของความเป็นไปในสิ่งต่าง ๆ ไม่ใช่แค่การคิดเลข

หลายท่าน (รวมถึงเด็ก ๆ จากประสบการณ์การสอนพิเศษมาหลายปีของผู้เขียน) อาจจะจำความรู้สึกมาจากตอนเรียนระดับมัธยมต้นว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการคิดเลข จำสูตรไปแทนค่าหาคำตอบ ขอแค่จำสูตรได้เยอะ ๆ อ่านโจทย์แล้วรู้ว่าใช้สูตรไหน คิดเลขให้ไว ๆ ก็น่าจะทำข้อสอบได้คะแนนดีกันแล้ว ผู้เขียนเคยเจอถึงขั้นว่ามีนักเรียนใช้วิธีดูว่าข้อนี้ต้องหยิบสูตรไหนมาคิดโดยการดูว่าเจอคีย์เวิร์ดอะไรในโจทย์ และบอกคนอื่นได้ว่าเราเรียนคณิตศาสตร์รู้เรื่อง แต่ทว่า พอขึ้นมาเรียนในระดับมัธยมปลาย กลับพบว่าคณิตศาสตร์เปลี่ยนไปอย่างมาก เราได้เรียนเรื่องเซต เรื่องตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์และฟังก์ชันในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กันเป็นเรื่องแรก ๆ ที่ตัวเนื้อหาตามหนังสือเรียนนั้น แทบไม่ใช่การคิดเลขเลย แต่เป็นเรื่องของการเรียนรู้การใช้สัญลักษณ์ เรียนรู้การให้เหตุผล เพื่อใช้สื่อสารกันในโลกของคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจจะต้องโทษวิธีการสอนของครูมัธยมไทยหลาย ๆ ท่านที่ทำให้เนื้อหาพวกนี้หนีไม่พ้นสอนการคิดเลขเหมือนเดิม เช่น**จัดรูป**อย่างง่ายของประพจน์ **คำนวณ**หาผลยูเนียน **คำนวณ**หาผลอินเตอร์เซคชัน หรือแม้กระทั่ง**คำนวณ**หาผลค่าความจริงในวิชาตรรกศาสตร์

ในบทนี้จะขอยกบทเรียนที่เป็นตัวละครสำคัญที่ทำให้เรามองคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของภาษา แทนที่จะมองว่าเป็นเครื่องมือในการคิดเลขได้แก่ (1) เซต (2) ตรรกศาสตร์ (3) ความสัมพันธ์ และ (4) ฟังก์ชัน ซึ่งเปรียบได้กับเป็น 4 เสาหลักของคณิตศาสตร์เลยก็ว่าได้ (จะมีกล่าวถึงในตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง)

2.1 เซต

อย่างเช่นเรื่องเซต เป้าหมายของบทนี้คือการต้องการใช้คณิตศาสตร์อธิบายความเป็นกลุ่ม ความเป็นสมาชิกของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง เช่นเราบอกว่านาย “a เป็นนักเรียน” เราก็จะมองในรูปแบบคณิตศาสตร์ว่าเรามีเซตของนักเรียน ในที่นี้สมมติให้เป็น S ที่ใครก็ตามที่อยู่ในเซต S จะถูกอธิบายความเป็นนักเรียน และนาย a ก็เป็นสมาชิกในเซตนักเรียน จึงเขียนเป็นสัญลักษณ์แทนประโยคดังกล่าวได้ว่า $\mathrm{a} \in S$ ที่แทนการกล่าวว่า “a เป็นนักเรียน”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรากล่าวว่านักเรียนก็เป็นบุคลากรของโรงเรียน ก็เปรียบเสมือนเรามีเซตที่เป็นกลุ่มของบุคลากรของโรงเรียน สมมติให้เป็น X และมีเซตของนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยในนั้น หรือกล่าวว่า เซตของนักเรียนเป็นเซตย่อยของเซตบุคลากร โดยเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $S \subseteq X$

อีกทั้ง ถ้าเรานำนิยามทางคณิตศาสตร์ของการเป็นเซตย่อยมาจับกับประโยคทั้งสอง

นิยาม 2.1.1: เซตย่อย

ให้ A และ B เป็นเซต เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยของ B หรือเขียนว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก x ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

ซึ่งเรามีประโยค (1) $\mathrm{a} \in S$ และ (2) $S \subseteq X$ จากนิยามของเซตย่อย 2.1.1 เราจะเห็นความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่เรามีกับเครื่องมือที่เรารู้ดังนี้

- S เปรียบเสมือน A ในนิยาม และ X เปรียบเสมือน B ในนิยาม
- $\mathrm{a} \in S$ สอดคล้องกับประโยค $x \in A$
- $S \subseteq X$ สอดคล้องกับประโยค $A \subseteq B$

จากนิยามดังกล่าวทำให้เราสรุปได้ว่า $x \in B$ (ในนิยาม) ซึ่งสอดคล้องกับประโยค $\mathrm{a} \in X$ หรือกล่าวคือ a เป็นบุคลากรของโรงเรียนเช่นกัน

ในบางครั้งนั้น เราต้องการอธิบายเชื่อมโยงกันระหว่าง 2 กลุ่ม (หรือมากกว่า) เช่นเราต้องการอธิบายว่านาย a เป็นนักเรียนที่ลงเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดีสครีตและวิชาโครงสร้างข้อมูล ซึ่งเป็นการกล่าวถึงกลุ่มของนักเรียน 2 กลุ่ม คือกลุ่มของนักเรียนที่ลงเรียนวิชาดีสครีต (สมมติให้เป็น C) และกลุ่มของนักเรียนที่ลงเรียนวิชาโครงสร้างข้อมูล (สมมติให้เป็น D) และชัดเจนว่า $C \subseteq S$ และ $D \subseteq S$ เพราะมีเพียงนักเรียนเท่านั้นที่ลงทะเบียนเรียนได้ กล่าวคือทุกคนที่จะลงทะเบียนเรียนวิชาดังกล่าวได้ต้องเป็นนักเรียน (ลองคิดทิศทางให้ดีว่าเป็น (1) ถ้าลงทะเบียนเรียนแล้วต้องเป็นนักเรียน หรือ (2) ถ้าเป็นนักเรียนแล้วต้องลงทะเบียนเรียน) แต่ทั้งนี้เราจะพูดอธิบายตลอดว่า “$\mathrm{a} \in C$ และ $\mathrm{a} \in D$” เพื่อเป็นตัวแทนประโยคดังกล่าวก็คงไม่กระชับมากนัก และ

ดูยังต้องเขียนเป็นประโยค 2 ประโยคมาเชื่อมกัน ไม่ใช่การเขียนประโยคของเซตเลย จึงได้นิยามการเชื่อมการอยู่ร่วมกันทั้ง 2 กลุ่มด้วยการอินเตอร์เซคชัน (**intersection**) กล่าวคือ a $\in C \cap D$ ซึ่งจะเห็นว่าจากประโยคที่ตัวหลักคือคำเชื่อม "และ" จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของเซตล้วนและตัวหลักของประโยคคือ "การเป็นสมาชิก" แทน

เราจะเห็นว่าคำศัพท์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเซตนั้น ก็เกิดมาเพื่อใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการเป็นสมาชิกในกลุ่มนั่นเอง ทว่าสิ่งที่อธิบายในเรื่องของวิธีการสรุปผลในข้างต้นนั้นก็ไม่ใช่บทบาทหน้าที่ของเรื่องเซต เพราะเซตเป็นเพียงการบอกว่ามีใครเป็นสมาชิกบ้าง แต่การสรุปผลต่างๆ เป็นบทบาทหน้าที่ของสิ่งที่เรียกว่า "ตรรกศาสตร์"

2.2 ตรรกศาสตร์

หรืออย่างในเรื่องตรรกศาสตร์เอง ก็เป็นการเรียนรู้โครงสร้างประโยคในภาษาคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการเชื่อมโยงระดับประโยค พร้อมทั้งมีการพิจารณาความเป็นจริงหรือไม่จริงหรือที่เรียกกันว่า ค่าความจริง[1] เป็นเบื้องหลังของการนิยามอยู่ เพราะตรรกศาสตร์ก็เกิดมาเพื่อต้องการใช้คณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจระบบความคิดของมนุษย์ในรูปแบบที่มาตรฐานขึ้น เลยถูกสร้างเลียนแบบการสื่อสารของมนุษย์ นำภาษามนุษย์มาทำให้เป็นรูปแบบเชิงสัญลักษณ์ พร้อมกับมีการนำไปใช้เพื่อวิเคราะห์ความเป็นเหตุเป็นผลเชิงค่าความจริง

ไม่เพียงแค่พิจารณาค่าความจริงของตัวประโยคเท่านั้น การศึกษาเชิงตรรกศาสตร์เองก็ยังรวมไปถึงการสร้างประโยคเพื่ออธิบายความเป็นตัวตนของสิ่งของในคณิตศาสตร์เช่นกัน เช่น ประโยค "x เป็นนักเรียน" (สมมติแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(x)$) จะถูกใช้เพื่อการอธิบายการเป็นนักเรียนของสิ่งของที่เราสนใจอยู่ [2] ซึ่งแน่นอนว่าเราไม่สามารถที่จะบอกค่าความจริงของตัวประโยคนี้ด้วยตัวมันเองได้ เพราะเราไม่รู้ว่าเราหมายถึง x คนไหน (หรืออาจจะไม่ใช่คนตั้งแต่แรกเสียด้วยซ้ำ) เราจะเรียกประโยคประเภทนี้ว่าประโยคเปิด

แต่ก่อนจะลงลึกในเรื่องของประโยคเปิด (ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป) จะขอกล่าวถึงแค่เฉพาะข้อความที่ระบุค่าความจริงได้ก่อน (ที่เรียกว่าประพจน์) ซึ่งในตรรกศาสตร์ เราจะนำประพจน์เหล่านี้มาเป็นตัวแทนของข้อความที่พูดกัน และนำมาเชื่อมประโยคเข้าด้วยกันด้วยตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ (1) และ (2) หรือ (3) ถ้า...แล้ว... (4) ก็ต่อเมื่อ และ (5) ไม่... ซึ่งแน่นอนว่าการดูค่าความจริงของตัวเชื่อมเหล่านี้ก็เป็นการนิยามมาจากวิธีคิดของมนุษย์ที่ตกลงกันไว้และใช้กันเป็นสามัญสำนึก ดังนี้

- "และ" จะมีบริบทการใช้งานที่เป็นการระบุการเกิดทั้งสองอย่างพร้อมกัน

---

[1]จริง ๆ แล้วยังมีการศึกษาตรรกศาสตร์ในรูปแบบที่เราไม่สนใจเรื่องค่าความจริงด้วย แต่จะสนใจในเรื่องของความถูกต้องของรูปแบบโครงสร้างการเขียน และสรุปผลด้วยโครงสร้างของประโยค ซึ่งเรียกว่าตรรกศาสตร์เชิงวากยสัมพันธ์

[2]ในเรื่องเซตจะเรียกเซตที่ระบุขอบเขตของสิ่งของที่เราสนใจว่า "เอกภพสัมพัทธ์"

- “หรือ” จะมีบริบทการใช้งานที่เป็นการระบุการเกิดอย่างน้อย 1 อย่าง (ซึ่งอาจจะต่างกับการใช้ “หรือ” ในภาษาไทยที่มีการใช้ในแง่คำถามให้เลือกเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง)

- “ถ้า...แล้ว...” จะให้ความรู้สึกของการกำหนดเงื่อนไขหรือกฎกติกาไว้ว่าเมื่อไหร่ก็ตามที่เกิดสิ่งหนึ่งขึ้นแล้วอีกสิ่งจะถูกบังคับว่าต้องเกิด มิฉะนั้นจะถือว่าเป็นการแหกกฎ

- “ก็ต่อเมื่อ” จะแทนความเป็นสิ่งเดียวกัน ใช้แทนกันได้

ซึ่งบริบทของคำเชื่อมเหล่านี้ไม่ใช่สิ่งที่แปรเปลี่ยนไปตามความเข้าใจของบุคคล แต่เป็นข้อตกลงในการตีความที่มีความรัดกุมอยู่แล้ว

และสิ่งที่เกิดตามมาจากแนวคิดของการดูค่าความจริงของคำเชื่อมทางตรรกศาสตร์ก็คือ “วิธีการให้เหตุผล” ที่เปรียบเสมือนเป็นการโน้มน้าวผู้ฟังให้เชื่อในสิ่งที่เรากำลังโต้แย้ง แต่เป็นการโต้แย้งแบบมีหลักการและตรรกะทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่นการที่เราจะบอกเพื่อนว่าเรามีของ 2 สิ่งคือ A **และ** B กล่าวคือ เรากำลังจะอ้างประโยค “มี A **และ** มี B” ก็เป็นเรื่องที่ค่อนข้างชัดเจนที่เราจะพิสูจน์ให้คนฟังเชื่อว่าประโยคนี้เป็นจริงด้วยการทำให้เขาเห็นว่าเรามี A อยู่ และทำให้เขาเห็นว่าเราก็มี B อยู่เช่นกัน

หรืออีกตัวอย่างคือประโยค “ถ้า...แล้ว...”[3] เช่นประโยค “ถ้าเขามาฉันจะไป” จะมีความหมายทางตรรกะว่าการที่เขามาจะเป็นการบังคับว่าฉันจะต้องไป ห้ามเกิดเหตุการณ์ว่าเขามาแล้วแต่ฉันยังฝืนอยู่ต่อ กล่าวคือจะเกิดข้อพิพาทหรือข้อขัดแย้งได้เฉพาะกรณีที่เขามาแล้วเท่านั้น ในกรณีที่เขายังไม่มาจะถือเป็นสถานการณ์ที่ยังคงปกติอยู่ ฉันจะไปหรือไม่ไปก็ไม่ได้มีข้อบังคับอะไรเกิดขึ้น ดังนั้นในการจะยืนยันว่าประโยคดังกล่าวจะเป็นจริงหรือไม่นั้น เราจะต้องทำการสมมติเหตุการณ์ว่าเขามาแล้วก่อน แล้วค่อยมาดูกันต่อว่าฉันจะไปหรือไม่ไป ถ้าฉันไปก็ถือว่าจบการพิสูจน์

จะเห็นว่าตรรกศาสตร์นั้นก็คือเครื่องมือที่ควบคุมขั้นตอนและวิธีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เมื่อเราทราบโครงสร้างการเป็นจริงเป็นเท็จของประโยค ก็จะทำให้เราทราบวิธีการที่จะให้เหตุผลหรือโต้แย้งได้แบบมีหลักการนั่นเอง

2.3 ความสัมพันธ์

2.4 ฟังก์ชัน

2.5 โครงสร้างของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง: บริบทและการตีความ

[3] จากประสบการณ์ ผู้เขียนพบว่าเด็ก ๆ เข้าใจตรรกะของสิ่งนี้ผิดกันเยอะมาก

Chapter 3

Basic Objects in Mathematics

Chapter 4

Logic, Reasoning and Proof

ในการทำงานสายคอมพิวเตอร์ เรามักได้ยินเกี่ยวกับการ “ทดสอบ” โปรแกรมให้ผ่านเคสต่าง ๆ หรือก็คือคำว่า unit test cse แต่การทดสอบให้ผ่านไม่ใช่หลักฐานว่าถูกต้องเสมอไป กล่าวคือ มันบอกได้แค่ว่าโปรแกรมไม่ผิด *ในเคสที่เราลอง* เท่านั้น ถ้าเราต้องการคำอธิบายที่ตรวจสอบได้ว่า “ทำไมมันต้องถูก” เราจำเป็นต้องมีวิธีคิดและวิธีเขียนที่รัดกุมกว่านั้น บทนี้จึงเป็นจุดเริ่มต้นของทักษะสำคัญที่สุดของหนังสือเล่มนี้: *การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และการพิสูจน์* (โดยเฉพาะในสายคอมพิวเตอร์)

ในบทที่ 2 ผู้เขียนได้เกริ่นบทบาทของตรรกศาสตร์ในฐานะเครื่องมือในการสร้างประโยคและการให้เหตุผลไปแบบคร่าว ๆ แล้ว คราวนี้ถึงเวลาที่เราจะลงรายละเอียดอย่างเป็นระบบ ตามชื่อบท ผู้อ่านจะพบคำสำคัญ 3 คำที่เป็นใจความสำคัญของบทนี้ ได้แก่ (1) **Logic** (ตรรกศาสตร์) (2) **Reasoning** (การให้เหตุผล) และ (3) **Proof** (การเขียนพิสูจน์) ทั้งสามสิ่งนี้แยกขาดจากกันไม่ได้: เมื่อเราอยาก *พิสูจน์* ข้อความใด เราต้อง *ให้เหตุผล* เพื่อเดินจากสิ่งที่รู้ไปสู่สิ่งที่ต้องการสรุป และเหตุผลที่ใช้ต้องถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์ ซึ่งอาศัย *ตรรกศาสตร์* เป็นรากฐานในการจัดรูปประโยคและตรวจความสมเหตุสมผลของการอนุมาน

มองอีกมุมหนึ่ง ตรรกศาสตร์ทำหน้าที่เหมือน “ชุดความรู้” (knowledge) หรือวิธีการคิด ที่ช่วยให้เราเห็นโครงสร้างของประโยคอย่างชัดเจน ความรู้นี้จะถูกนำไปฝึกเป็น “ทักษะ” (skill) การให้เหตุผลอย่างมีแบบแผน และเมื่อเราให้เหตุผลได้แล้ว ขั้นสุดท้ายคือมี “ระเบียบวิธี” (methodology) สำหรับสื่อสารกระบวนการคิดนั้นให้ผู้อื่นตรวจสอบได้ — นั่นคือการเขียนพิสูจน์ (proof writing)

สำหรับผู้อ่านท่านใดที่เคยผ่านวิชาที่เน้นการเขียนพิสูจน์มาแล้ว อาจเลือกอ่านแบบกวาดเร็วหรือข้ามบางส่วนได้ แต่สำหรับผู้อ่านที่ยังไม่มีประสบการณ์ในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ขอให้อยู่กับบทนี้ให้มากพอก่อนจะเริ่มบทถัดไป เพราะเป้าหมายหลักของหนังสือนี้คือการฝึกทักษะการให้เหตุผลและพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์ ไม่ใช่หนังสือเตรียมสอบ และไม่ใช่หนังสือที่รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้ท่องจำ (เช่น อ่านบทตรรกศาสตร์ของหนังสือ

เล่มนี้เข้าใจก็ไม่ได้หมายความว่าจะทำข้อสอบบทตรรกศาสตร์ของวิชา ม.4 ได้[1]) แต่เป็นหนังสือที่จะพาผู้อ่าน "คิดไปด้วยกัน" ทีละขั้นตอน: ตอนนี้เรากำลังทำอะไร, ทำไปเพื่ออะไร, ทำแล้วได้อะไร, และจากจุดนี้เราควรเดินต่ออย่างไร

เพื่อให้การเรียนรู้มีทิศทาง บทนี้จะค่อย ๆ วางพื้นฐานจาก *ภาษาของตรรกศาสตร์* (การสร้างประโยคและความหมาย) ไปสู่ *กฎการให้เหตุผล* (รูปแบบการอนุมานที่ถูกต้องและข้อผิดพลาดที่พบบ่อย) และจบด้วย *การเขียนพิสูจน์* ในรูปแบบมาตรฐานที่ตรวจสอบได้ เมื่อจบบทนี้ ผู้อ่านควรเริ่มคุ้นกับการอ่าน "รูปประโยค" ให้ขาด และเลือก "โครงพิสูจน์" ให้เหมาะกับสิ่งที่ต้องการแสดงได้มากขึ้น

4.1 ตรรกศาสตร์คืออะไร

ถ้าแปลตามตัวคำ *ตรรกศาสตร์* (Logic) คือ "ศาสตร์แห่งการศึกษาตรรกะ" หรือกล่าวให้ชัดคือ ศาสตร์ที่ศึกษาว่า **เราพูดถึงข้อความแบบใดได้บ้าง**, **ข้อความนั้นมีเงื่อนไขที่จะเป็นจริงหรือเท็จอย่างไร**, และ **เราสามารถสรุปจากข้อความหนึ่งไปสู่อีกข้อความหนึ่งได้อย่างถูกต้องหรือไม่** ทั้งหมดนี้เป็นรากฐานของ *วิธีคิดแบบคณิตศาสตร์*[2] ซึ่งเราจะนำไปใช้ตลอดทั้งเล่มในการอ่านโจทย์ ตั้งสมมติฐาน อนุมาน และสรุปผลอย่างเป็นระบบ

อย่างไรก็ตาม การจะสรุปหรือให้เหตุผลสิ่งใดให้ผู้อื่นยอมรับร่วมกัน เราควรมี "โครงสร้างที่ตกลงร่วมกัน" ก่อนว่าเรากำลังพูดเรื่องอะไรและใช้กติกาใดในการอนุมาน และโครงสร้างร่วมนี้ก็คือ **ตรรกศาสตร์** นั่นเอง กล่าวคือ เราจะพูดถึงข้อความแบบไหนกัน (เช่น *ประพจน์* และ *ประโยคเปิด*), เราจะประกอบข้อความย่อยให้เป็นข้อความใหญ่ด้วยอะไร (เช่น *ตัวเชื่อมตรรกะ*), เราจะกล่าวถึง "ทุกตัว" หรือ "มีอยู่บางตัว" ของสิ่งที่สนใจอย่างไร (เช่น *ตัวบ่งปริมาณ* และ *โดเมน*), และเมื่อได้ข้อความเหล่านี้แล้ว เราจะใช้กฎใดเชื่อมเหตุผลเพื่อไปสู่ข้อสรุป (กฎการอนุมาน) ส่วนการพิสูจน์ (proof) คือการเล่าเหตุผลนั้นในรูปแบบที่ผู้อ่านสามารถตรวจสอบทีละขั้นได้

ในหัวข้อย่อยนี้ เราจะปูพื้นฐานเครื่องมือสำคัญที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ได้แก่ แนวคิดเรื่องประพจน์และประโยคเปิด, ตัวเชื่อมตรรกะและค่าความจริง, ตัวบ่งปริมาณพร้อมการระบุโดเมน, และข้อผิดพลาดที่พบบ่อยซึ่งมักทำให้เหตุผล "ดูเหมือนถูก" แต่จริง ๆ แล้วไม่ถูกต้อง

[1] ผู้เขียนยังทำข้อสอบเรื่องตรรกศาสตร์ในข้อสอบสอบเข้ามหาวิทยาลัยไม่ค่อยได้เช่นกันครับ

[2] ผู้เขียนมีความเชื่ออย่างแรงกล้าว่าคณิตศาสตร์คือวิธีการคิดและการให้เหตุผล คล้ายกับที่เราใช้คำว่า "วิธีการทางวิทยาศาสตร์" ดังนั้นในหนังสือนี้ผู้เขียนจึงตั้งใจเน้นคำว่า "วิธีคิด/วิธีการให้เหตุผลแบบคณิตศาสตร์" ให้เด่น แยกจากภาพจำที่ว่าคณิตศาสตร์คือ "การคำนวณตามสูตร" เพราะทั้งสองแนวคิดนี้มีธรรมชาติและเป้าหมายที่ค่อนข้างแตกต่างกัน

4.1.1 ประพจน์ (Proposition) และประโยคเปิด (Predicate)

ในภาษามนุษย์ เรามีประโยคสำหรับสื่อสารหลากหลายรูปแบบ ทางภาษาศาสตร์มักแยกการศึกษาประโยคเป็นสองมุมคือ *ไวยากรณ์* (syntax) ซึ่งดูรูปแบบการเรียงคำ และ *อรรถศาสตร์* (semantics) ซึ่งดูความหมาย ในทางตรรกศาสตร์ก็มีการแยกมุมมองคล้ายกัน แต่ในหนังสือเล่มนี้เราจะเน้นประโยคที่ *มีกรอบความหมายชัดเจนพอที่จะตัดสินได้ว่า "จริง" หรือ "เท็จ"* คุณสมบัตินี้เรียกว่า **ค่าความจริง** (truth value)

ดังนั้นเราจะสนใจประโยคสองชนิดหลัก: (1) **ประพจน์** (proposition) คือประโยคที่มีค่าความจริงแน่นอน (จริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง) และ (2) **ประโยคเปิด** (predicate / open sentence) คือประโยคที่มีตัวแปรทำให้ยังไม่สามารถตัดสินค่าความจริงได้ จนกว่าเราจะ *กำหนดค่าตัวแปร* หรือ *ใช้ตัวบ่งปริมาณ* มาครอบตัวแปรนั้น ทั้งนี้ การพูดถึงประโยคเปิดจะสมบูรณ์ขึ้นเมื่อระบุด้วยว่า ตัวแปรกำลังวิ่งอยู่ใน **โดเมน** (domain) ใด

นิยาม 4.1.1: ประพจน์และประโยคเปิด

ประพจน์ (proposition) คือประโยคที่สามารถระบุได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ และไม่สามารถเป็นทั้งสองอย่างพร้อมกันได้ ตัวอย่างเช่น "2 เป็นจำนวนคู่"
ประโยคเปิด (predicate) คือประโยคที่มีตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัว ทำให้ยังไม่เป็นประพจน์ เพราะยังไม่ทราบว่าตัวแปรนั้นแทนค่าอะไร ตัวอย่างเช่น "x เป็นจำนวนคู่" เมื่อกำหนดค่าให้ตัวแปร (เช่น $x = 2$) หรือเมื่อใช้ตัวบ่งปริมาณมาครอบ (เช่น $\forall x\,(\cdots)$ หรือ $\exists x\,(\cdots)$) ประโยคที่ได้จะกลายเป็นประพจน์

หมายเหตุ

มีหลายสิ่งที่นักศึกษาอาจเข้าใจผิดเกี่ยวกับประพจน์

- ไม่ใช่ทุกประโยคในภาษามนุษย์เป็นประพจน์ เช่น คำสั่ง ("ปิดประตูด้วย") หรือคำถาม ("คุณชื่ออะไร?") ไม่สามารถระบุค่าความจริงว่า "จริง/เท็จ" ได้
- ประโยคที่เราอาจยังไม่รู้แน่ชัดในโลกจริงว่าจริงหรือไม่จริง ก็ยังจัดว่าเป็นประพจน์ได้ *ตราบใดที่ในหลักการมันต้องจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง* เช่น "มีมนุษย์ต่างดาวอยู่ในจักรวาลนี้"
- บางครั้งค่าความจริงของประโยคขึ้นกับ *บริบทและข้อตกลงตั้งต้น* ของการสนทนา ในคณิตศาสตร์ข้อตกลงตั้งต้นเหล่านี้เรียกว่า **สัจพจน์** (axiom) หากสงสัยว่าทำไมประโยคหนึ่งจึง "นับว่าจริง" หรือ "นับว่าเท็จ" ให้ย้อนถามว่า เราอยู่ภายใต้สมมติฐาน/ข้อตกลงใดอยู่

4.1.2 ตัวเชื่อมตรรกะและค่าความจริง

จากหัวข้อก่อนหน้า เรารู้แล้วว่าประพจน์คือประโยคที่สามารถตัดสินได้ว่า “จริง” หรือ “เท็จ” ในตรรกศาสตร์ เราเรียกสองค่านี้ว่า **ค่าความจริง** (truth value) และมักเขียนย่อเป็น **T** (จริง) และ **F** (เท็จ)[3] จุดสำคัญคือ เมื่อเรามีประพจน์ย่อยหลาย ๆ อัน เราต้องการ “เครื่องมือ” สำหรับประกอบประพจน์เหล่านั้นให้เป็นประโยคที่ซับซ้อนขึ้น เครื่องมือนี้เรียกว่า **ตัวเชื่อมตรรกะ** (logical connectives)

นิยาม 4.1.2: ตัวเชื่อมตรรกะและการตีความค่าความจริง

ให้ p, q เป็นประพจน์

- **นิเสธ** (negation) เขียน $\neg p$ แปลว่า “ไม่เป็นจริงที่ p” (ตรงข้ามกับ p)
- **และ** (conjunction) เขียน $p \wedge q$ แปลว่า “p และ q” (ต้องเป็นจริงทั้งคู่)
- **หรือ** (disjunction) เขียน $p \vee q$ แปลว่า “p หรือ q (หรือทั้งคู่)” (อย่างน้อยหนึ่งอย่าง)
- **ถ้า** p **แล้ว** q (implication) เขียน $p \to q$ (การเป็นเหตุเป็นผลของการเกิดขึ้น)
- **ก็ต่อเมื่อ** (biconditional) เขียน $p \leftrightarrow q$ แปลว่า “p ก็ต่อเมื่อ q” (ความเสมือนกัน)

ค่าความจริงของประโยคที่ประกอบขึ้นจากตัวเชื่อมเหล่านี้สามารถกำหนดได้ด้วย **ตารางค่าความจริง** (truth table)[a]

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**

[a] นักศึกษาไม่จำเป็นต้องจำตารางค่าความจริง ถ้านักศึกษาเข้าใจความหมายของตัวเชื่อมแต่ละตัว

[3] หนังสือบางเล่มใช้ $\top$ และ $\bot$

หมายเหตุ: ความหมายของ $p \to q$

นักศึกษามักรู้สึกแปลกใจที่เมื่อ p เป็นเท็จแล้ว $p \to q$ กลับเป็นจริง (สองแถวล่างในคอลัมน์ $p \to q$) นี่เป็นนิยามมาตรฐานที่ทำให้ "การพิสูจน์แบบสมมติ p แล้วแสดง q" ทำงานได้อย่างเป็นระบบ และสอดคล้องกับการใช้งานในคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
กล่าวอีกทำนองคือ ถ้าโปรแกรม *ไม่* ตรงเงื่อนไขก่อน (precondition) แล้วสัญญาแบบ "ถ้า precondition เป็นจริงแล้ว postcondition ต้องเป็นจริง" ยังไม่ถูกละเมิด (กล่าวคือเราไม่ได้สัญญาว่าโปรแกรมจะทำงานได้ถูกต้องเมื่อเจอ input นอก scope งาน ถ้าทำได้ถูกถือว่าเป็นของแถม ถ้าทำได้ไม่ถูกก็ไม่กระทบอะไรเพราะตอนไปใช้งานจริงก็ไม่เจอ input เหล่านั้น)

รูปสมมูลของ $p \to q$

อีกมุมหนึ่ง $p \to q$ เทียบเท่ากับ $\neg p \vee q$ ("ไม่ p หรือ q") ซึ่งช่วยให้ตรวจค่าความจริงได้ง่ายขึ้น โดยมีความหมายเปรียบเสมือนว่าเราจะไม่ทำผิดสัญญาแน่ ๆ ในกรณีที่เราไม่ตั้งข้อสัญญานั้นไว้ตั้งแต่แรก ($\neg p$) หรือไม่ก็เราทำตามผลของข้อตกลงตลอดอยู่แล้ว (q)

Example 4.1.3. ให้ p แทน "n เป็นจำนวนคู่" และ q แทน "n^2 เป็นจำนวนคู่"
ประโยค "ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่" เขียนได้เป็น $p \to q$
ประโยค "n เป็นจำนวนคู่และ n^2 เป็นจำนวนคู่" เขียนได้เป็น $p \wedge q$

Exercise 4.1.4. 5 ตัวเชื่อมตรรกะที่ได้กล่าวถึงไปในนิยามด้านบนเป็นตัวเชื่อมที่เรามักพบเจอในภาษามนุษย์ ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการแปลงภาษามนุษย์เป็นสัญลักษณ์ตรรกศาสตร์ เราจึงนิยามตัวเชื่อม 5 ตัวดังกล่าวขึ้นมา แต่ในแง่ความครอบคลุม จริง ๆ แล้วเราสามารถใช้เพียงแค่ 3 ตัวเชื่อมคือ $\neg, \wedge, \vee$ ก็สามารถครอบคลุมทุกกรณีค่าความจริงที่อยากอธิบายได้ จงใช้ตัวเชื่อมตรรกะ $\neg, \wedge, \vee$ เพื่อนิยามตัวเชื่อม $p \to q$ และตัวเชื่อม $p \leftrightarrow q$[4]

Exercise 4.1.5. จงอธิบายว่าทำไม $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ โดยใช้การที่เราทราบว่า $p \to q \equiv \neg p \vee q$
คำใบ้: $q \equiv \neg(\neg q)$

---

[4]เฉลย: $(b\neg \wedge d) \vee (b \wedge d\neg) \equiv b \leftrightarrow d$ ‘$b \wedge d\neg \equiv b \leftarrow d$

4.1.3 ตัวบ่งปริมาณ $\forall, \exists$ และการระบุเอกภพสัมพัทธ์

ประโยคเปิด (predicate) เช่น "x เป็นจำนวนคู่" ยังไม่เป็นประพจน์เพราะตัวแปร x ยังไม่ชี้ชัดว่าแทนอะไร วิธีที่ง่ายที่สุดที่ทำให้กลายเป็นประพจน์คือการแทนค่าเฉพาะเจาะจงเข้าไป เช่น แทนค่า $x = 2$ ลงไปจะได้ประพจน์ "2 เป็นจำนวนคู่" ทว่าไม่มีมีอะไรน่าสนใจ ถ้าเราสนใจการพิจารณาแค่ค่าเดียวแล้วจบ เราจึงขยายความสนใจไปที่การที่เรามีกลุ่มที่พิจารณาหลายตัว กล่าวคือเรามีเอกภพสัมพัทธ์ หรือก็คือโดเมนของการพิจารณานั่นเอง แต่ก่อนที่จะไปสู่วิธีการทำให้เป็นประพจน์บนหลายสมาชิก อยากให้ผู้อ่านลองคิดตามตามคำถามดังต่อไปนี้

Exercise 4.1.6. สมมติให้ประโยคเปิดที่เราพิจารณาคือ $P(x)$ แทนประโยค "x เป็นจำนวนคู่" และเอกภพสัมพัทธ์ที่พิจารณาคือ $U = \{1, 2, 3\}$ ถ้าอนุญาตให้ใช้แค่ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ จะสามารถอธิบายประโยคต่อไปนี้ในรูปแบบสัญลักษณ์ได้อย่างไร (ยังไม่ต้องสนใจว่าจริงหรือเท็จ สนใจแค่วิธีเขียน)

1. ทุกสมาชิกใน U สอดคล้องคุณสมบัติ $P(x)$[5]
2. มีสมาชิกใน U อย่างน้อย 1 ตัวที่สอดคล้องคุณสมบัติ $P(x)$ [6]

Exercise 4.1.7. ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 4.1.6 ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ U ที่เราพิจารณาเปลี่ยนเป็นเซตอนันต์ (มีสมาชิกอนันต์ตัว) จะเกิดปัญหาอะไรกับวิธีการเขียนแบบเดิมบ้าง (นี่คือเหตุผลว่าทำไมจึงต้องนิยามสัญลักษณ์ $\forall, \exists$ ขึ้นมา)

นอกจากการแทนค่าแค่ 1 สมาชิกเข้าไปในตัวแปรในประโยคเปิด เรายังสามารถทำประโยคเปิดให้กลายเป็นประพจน์ได้โดยใช้ **ตัวบ่งปริมาณ** (quantifiers) มาครอบ นอกจากนี้ เราต้องระบุด้วยว่าตัวแปรกำลังวิ่งอยู่ใน **เอกภพสัมพัทธ์** (universe) ใด เพราะเอกภพสัมพัทธ์ที่ต่างกันอาจทำให้ค่าความจริงเปลี่ยนได้

นิยาม 4.1.8: ตัวบ่งปริมาณและโดเมน

ให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิด และให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ (เช่น $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ หรือเซตที่กำหนดขึ้น)

- **ตัวบ่งปริมาณทุกตัว** (universal quantifier) เขียน $\forall x \in U\ P(x)$ แปลว่า "สำหรับทุก x ใน U ประโยค $P(x)$ เป็นจริง"
- **ตัวบ่งปริมาณการมี** (existential quantifier) เขียน $\exists x \in U\ P(x)$ แปลว่า "มี x บางตัวใน U ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง"

เมื่อมีตัวบ่งปริมาณมาครอบ ตัวแปร x จะไม่เป็นตัวแปรอิสระอีกต่อไป และทั้งประโยคจะมีค่าความ

[5] เฉลย: $P(1) \land P(2) \land P(3)$

[6] เฉลย: $P(1) \lor P(2) \lor P(3)$

จริง (เป็นประพจน์)

Example 4.1.9. แปลงประโยคภาษามนุษย์เป็นสัญลักษณ์ (ชีวิตประจำวัน) กำหนดสัญลักษณ์เชิงประโยคเปิดดังต่อไปนี้

- ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $U =$ "บุคคลทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับรายวิชานี้"
- $S(x)$: "x เป็นนักศึกษาในรายวิชานี้"
- $G(x)$: "x อยู่ในกลุ่มไลน์รายวิชานี้"
- $R(x)$: "x อ่านประกาศล่าสุดแล้ว"
- $H(x)$: "x ส่งการบ้านแล้ว"
- $M(x, y)$: "x ส่งข้อความหา y"
- กำหนดค่าคงที่ $a =$ "ออม", $b =$ "บาส", $t =$ "อาจารย์"

จงแปลงประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ โดยใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดมาให้

1. ออมอยู่ในกลุ่มไลน์และอ่านประกาศล่าสุดแล้ว
2. นักศึกษาทุกคนที่อยู่ในกลุ่มไลน์อ่านประกาศล่าสุดแล้ว
3. มีนักศึกษาบางคนที่ไม่อ่านประกาศล่าสุด
4. ไม่ใช่ว่านักศึกษาทุกคนส่งการบ้านแล้ว
5. ทุกคนส่งข้อความหาอาจารย์
6. มีคนคนหนึ่งที่อาจารย์ส่งข้อความหา และคนนั้นไม่ส่งการบ้าน
7. นักศึกษาทุกคนส่งข้อความหาใครสักคนที่อยู่ในกลุ่มไลน์
8. ไม่มีใครส่งข้อความหาตัวเอง

Example 4.1.10. กำหนดสัญลักษณ์เชิงประโยคเปิดดังต่อไปนี้

- ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $U = \mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะ
- $R(x)$: "x เป็นจำนวนตรรกยะ"

- $I(x)$: "x เป็นจำนวนเต็ม"
- $L(x, y)$: "$x < y$"
- $a = 1, b = 2, m = 1000000$

จงแปลงประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัปญลักษณ์ โดยใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดมาให้

1. 1 เป็นจำนวนเต็ม
2. ทุกจำนวนเต็มเป็นจำนวนตรรกยะ
3. ไม่ใช่ทุกจำนวนตรรกยะที่จะเป็นจำนวนเต็ม
4. ไม่มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุด
5. ไม่มีจำนวนเต็มที่มากที่สุด
6. ถ้า x และ y เป็นจำนวนตรรกยะที่ $x < y$ แล้วจะมีจำนวน z ที่มากกว่า x แต่น้อยกว่า y

การพิจารณาค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

แต่ละตัวบ่งปริมาณมีวิธีการพิจารณาดังนี้

- ตัวอย่าง $\forall n \in \mathbb{Z}\,(n$ เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow n^2$ เป็นจำนวนคู่$)$
ประโยคนี้เป็นแบบ "$\forall$" กรณีเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตจำกัดและมีไม่เยอะเกินไป (ง่าย) สามารถตรวจสอบได้โดยการดูว่าแต่ละสมาชิกทำให้ข้อความดังกล่าวเป็นจริง แต่ในกรณีมีสมาชิกเยอะมากหรือเป็นเซตอนันต์ เวลา *พิสูจน์* (หรืออธิบาย) เรามักเริ่มด้วยการ "พิจารณา n ใด ๆ ในโดเมน" (กล่าวคือระบุไม่ได้ว่าคือตัวไหนแบบเฉพาะเจาะจง แต่ใช้ได้เพียงแค่คุณสมบัติของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์) แล้วแสดงข้อความให้ได้สำหรับ n ตัวนั้น

- ตัวอย่าง $\exists n \in \mathbb{Z}\,(n^2 = 4)$
ประโยคนี้เป็นแบบ "$\exists$" ดังนั้นเวลา *พิสูจน์* เราต้องให้ *พยาน* (witness) เช่น $n = 2$ หรือ $n = -2$ แล้วตรวจว่าเงื่อนไขเป็นจริง

Example 4.1.11 (กรณีเอกภพสัมพัทธ์มีสมาชิกไม่เยอะ)**.** สมมติให้ประโยคเปิดที่เราพิจารณาคือ $P(x)$ แทนประโยค "x เป็นจำนวนคู่" จงพิจารณาค่าความจริงที่ได้ของประโยค $\forall x \in U, P(x)$ และ $\exists x \in U, P(x)$ โดยที่

1. $U = \{1, 2, 3\}$

2. $U = \{2, 4, 6\}$
3. $U = \{1, 3, 5\}$

Example 4.1.12 (อธิบายเหตุผลทั่วไปก่อน ยังไม่ต้องพิสูจน์ทางการ).

การพิจารณาค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

คำเตือน: ลำดับของตัวบ่งปริมาณมีผล

ประโยค $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ และ $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ มักให้ความหมายต่างกันมาก ตัวอย่างในเชิงสัญชาตญาณ: "สำหรับทุกอินพุต มีเวลารันบางค่า (อาจต่างกัน) ที่ทำให้โปรแกรมจบ" กับ "มีเวลารันค่าหนึ่งที่ใช้ได้กับทุกอินพุต" ซึ่งไม่ใช่สิ่งเดียวกัน

4.1.4 ข้อผิดพลาดที่พบบ่อย

หัวข้อนี้รวบรวม "กับดัก" ที่ทำให้เหตุผลดูเหมือนถูก แต่จริง ๆ แล้วผิด การรู้กับดักเหล่านี้มีประโยชน์ทั้งเวลาพิสูจน์เองและเวลาตรวจพิสูจน์ของผู้อื่น

1. **ไม่ระบุโดเมน**
   เขียน $\forall x\, P(x)$ โดยไม่บอกว่า x วิ่งอยู่ในเซตไหน ทำให้ประโยคกำกวม (เช่น "ทุกจำนวนเป็นจำนวนคู่" จะจริงหรือเท็จขึ้นกับโดเมน)

2. **สลับ $\forall$ กับ $\exists$**
   "ทุกคนมีเพื่อน" คือ $\forall x\, \exists y\, \text{Friend}(x, y)$
   แต่ "มีคนหนึ่งที่เป็นเพื่อนของทุกคน" คือ $\exists y\, \forall x\, \text{Friend}(x, y)$
   สองประโยคนี้ต่างกัน และมักสลับกันโดยไม่รู้ตัว

3. **ลืมขอบเขตของวงเล็บ (scope)**
   $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ ไม่เหมือนกับ $(\forall x\, P(x)) \to (\forall x\, Q(x))$ การใส่วงเล็บให้ชัดช่วยลดความผิดพลาดมาก

4. **เข้าใจ "หรือ" แบบ exclusive โดยไม่ตั้งใจ**
   ในตรรกศาสตร์ $p \vee q$ หมายถึง "อย่างน้อยหนึ่งเป็นจริง" (รวมกรณีที่ทั้งคู่จริง) ถ้าต้องการ "หรือแบบอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น" ต้องระบุเพิ่ม
5. **ปฏิเสธตัวบ่งปริมาณผิด**
   $\neg(\forall x\, P(x))$ เทียบเท่ากับ $\exists x\, \neg P(x)$
   และ $\neg(\exists x\, P(x))$ เทียบเท่ากับ $\forall x\, \neg P(x)$
   นักศึกษามักเผลอ "ลาก $\neg$ เข้าไป" โดยไม่สลับ $\forall/\exists$
6. **สับสนทิศของนัย ($\rightarrow$)**
   จาก $p \rightarrow q$ เรา *สรุปย้อนกลับ* เป็น $q \rightarrow p$ ไม่ได้ (นี่คือความผิดพลาดคลาสสิกที่ทำให้พิสูจน์ "ดูดี" แต่ผิด)

เทคนิคตรวจตนเองอย่างเร็ว

เวลาสงสัยว่าประโยคหรือการอนุมาน "น่าจะผิด" ให้ลองทำสองอย่างนี้: (1) มองหากรณีตัวอย่างค้าน (counterexample) และ (2) เขียนรูปตรรกะให้ชัดพร้อมวงเล็บและโดเมน สองขั้นตอนนี้มักทำให้เห็นจุดผิดได้เร็วมาก

4.2 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์

หัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ไม่ใช่การหาคำตอบที่ถูกต้อง แต่คือการอธิบายอย่างมีเหตุผลว่า "ทำไม" คำตอบนั้นจึงถูกต้อง **การพิสูจน์** (proof) จึงเป็นกระบวนการที่ทำให้คณิตศาสตร์แตกต่างจากศาสตร์อื่น ๆ เพราะไม่ใช่เพียงการสังเกตจากตัวอย่างหรือการคำนวณเชิงประสบการณ์ แต่คือการสร้างหลักฐานเชิงตรรกะที่ยืนยันความจริงได้ในทุกกรณี การเรียนรู้วิธีการพิสูจน์จึงเปรียบได้กับการฝึกให้คิดอย่างเป็นระบบ สื่อสารอย่างมีเหตุผล และตรวจสอบความถูกต้องของแนวคิดของตนเองได้อย่างอิสระ

ในทางปฏิบัติ "การพิสูจน์" ไม่ได้หมายถึงการเขียนข้อความยาว ๆ ด้วยถ้อยคำซับซ้อน แต่หมายถึงการรู้จักวิเคราะห์โครงสร้างของประโยคทางคณิตศาสตร์ ว่ามีตัวบ่งปริมาณ (quantifier) ประเภทใด มีรูปแบบเงื่อนไขอย่างไร และควรใช้วิธีการใดในการเชื่อมโยงสมมติฐานไปยังข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง การพิสูจน์บางประเภทใช้ตรรกะตรงไปตรงมา (direct proof) ขณะที่บางประเภทอาศัยการแปลงรูปแบบของข้อความ (contrapositive proof) หรือแม้กระทั่งการสมมติสิ่งตรงข้ามขึ้นมาเพื่อนำไปสู่ความขัดแย้ง (proof by contradiction)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา "วิธีการพิสูจน์" ที่เป็นรากฐานของคณิตศาสตร์เชิงตรรกะ ซึ่งปรากฏอยู่ในแทบทุกแขนงของคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ โดยเนื้อหาจะค่อย ๆ พาผู้อ่านเข้าใจจากระดับของประโยคพื้นฐานไปสู่ระดับที่ซับซ้อนขึ้น เริ่มจากการวิเคราะห์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณสากล (for all) และข้อความเชิงเงื่อนไข (if–then) ไปจนถึงข้อความที่มีการมีอยู่ (there exists) และปิดท้ายด้วยเทคนิคการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (contradiction) รวมถึงส่วนเสริมเกี่ยวกับองค์ประกอบย่อยของประโยคเชิงตรรกะ เช่น "และ" (and) และ "หรือ" (or) ซึ่งมักปรากฏอยู่ในการพิสูจน์แทบทุกแบบ

จุดมุ่งหมายของบทนี้ไม่ใช่ให้ผู้อ่านจำรูปแบบการพิสูจน์ได้ แต่เพื่อให้สามารถ "เลือกใช้วิธีที่เหมาะสม" ในการอธิบายความจริงทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เมื่อเข้าใจหลักการพิสูจน์แล้ว ผู้อ่านจะสามารถนำแนวคิดนี้ไปใช้ตรวจสอบความถูกต้องของนิพจน์ สมบัติของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ หรือแม้แต่ความถูกต้องของอัลกอริทึมที่ตนเขียนได้ในรายวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ในลำดับถัดไป

Key Takeaway:

- "การพิสูจน์" คือการเชื่อมสมมติฐานไปยังข้อสรุปผ่านตรรกะที่ถูกต้อง
- ฝึกวิเคราะห์สมมติฐานและข้อสรุปจากนิยาม
- บางครั้งต้องพิสูจน์กรณีทั่วไป บางครั้งต้องหาหลักฐานพยานยืนยัน

4.2.1 องค์ประกอบพื้นฐานของข้อความตรรกะ

ก่อนอื่น ควรทำความเข้าใจโครงสร้างย่อยของประโยคเชิงตรรกะที่มักปรากฏในการพิสูจน์ เช่น ข้อความที่เชื่อมด้วยคำว่า "และ" (and) หรือ "หรือ" (or) ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อวิธีการวิเคราะห์และการแยกกรณีในการให้เหตุผล การเข้าใจการใช้คำเชื่อมเหล่านี้อย่างถูกต้องช่วยให้สามารถเขียนและอ่านพิสูจน์ได้แม่นยำขึ้น โดยเฉพาะเมื่อข้อความหนึ่งมีเงื่อนไขหลายส่วนที่ต้องพิสูจน์พร้อมกัน หรือมีหลายกรณีที่ต้องตรวจสอบแยกต่างหาก

ในแต่ละหัวข้อย่อย จะขอกล่าวถึง 2 รูปแบบที่จำเป็นคือ (1) การนำไปใช้งาน และ (2) การแสดงให้เห็นจริง

ข้อความ "และ"

อย่างที่ทราบกันอยู่แล้วว่าตารางค่าความจริงของข้อความ "และ" คือ

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

กล่าวคือ กรณีเดียวที่จะเป็นจริง คือกรณีที่ทั้งสองประพจน์ย่อยต้องเป็นจริง ดังนั้นการนำไปใช้งานเมื่อจะอ้างถึง (หรือสมมติมาแล้วว่าเป็นจริง) คือการนำแต่ละส่วนไปใช้งานแยกกันได้อิสระเลยโดยไม่จำเป็นต้องอ้างถึงทั้งคู่ในเวลาเดียวกัน

ในขณะที่การจะแสดงให้เห็นจริงของประโยค "และ" คือการพิสูจน์ประพจน์ย่อยทั้งสองให้เห็นจริงทีละตัว

ข้อความ "หรือ"

การปฏิเสธ

4.2.2 การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ *for all*

ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณแบบ "for all" หรือ $\forall$ มักเป็นข้อความที่กล่าวถึงความจริงสากล เช่น "สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะเป็นจริงว่า ..." การพิสูจน์ข้อความลักษณะนี้มักเป็นการเลือกวัตถุทั่วไปหนึ่งตัว (arbitrary element) แล้วแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงในกรณีทั่วไป ซึ่งถือเป็นรากฐานของการพิสูจน์แบบตรง (direct proof) นักศึกษาจึงต้องเข้าใจทั้งนิยามของคำสำคัญที่ปรากฏในข้อความ และวิธีเชื่อมโยงสมมติฐานไปยังข้อสรุปโดยไม่อาศัยการคาดเดาจากตัวอย่างเฉพาะ

4.2.3 การพิสูจน์ข้อความเงื่อนไขผลสรุป

ข้อความเชิงเงื่อนไข (conditional statement) มีรูปทั่วไปว่า "ถ้า P แล้ว Q" ซึ่งในทางตรรกะหมายถึงว่าเมื่อสมมติว่าข้อความ P เป็นจริง ข้อความ Q จะต้องเป็นจริงด้วย การพิสูจน์ข้อความลักษณะนี้จึงเป็นการแสดงให้เห็นว่าความจริงของ P เพียงพอที่จะนำไปสู่ความจริงของ Q ได้ วิธีการที่ใช้มีหลายแบบ เช่น การพิสูจน์ตรง (direct proof), การพิสูจน์โดยรูปกลับ (contrapositive proof) หรือการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (contradiction proof) ซึ่งแต่ละวิธีจะมีแนวคิดและโครงสร้างการให้เหตุผลต่างกันไป

Direct Proof

การพิสูจน์แบบตรง (Direct Proof) เป็นวิธีพื้นฐานที่สุดของการพิสูจน์ข้อความเชิงเงื่อนไข โดยเริ่มจากสมมติว่าข้อความ P เป็นจริง แล้วใช้ข้อเท็จจริง นิยาม หรือทฤษฎีที่ทราบอยู่เดิม เพื่ออนุมานไปทีละขั้นจนได้ข้อสรุป

Q วิธีนี้เป็นรูปแบบของการให้เหตุผลเชิงตรรกะที่ตรงไปตรงมา และช่วยฝึกการอธิบายอย่างมีลำดับชัดเจน เช่น การพิสูจน์ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่" ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้เพียงนิยามของจำนวนคู่และการคำนวณทางพีชคณิตอย่างง่าย

Contrapositive Proof

การพิสูจน์โดยรูปกลับ (Contrapositive Proof) อาศัยสมบัติที่ว่า ข้อความ "ถ้า P แล้ว Q" สมมูลกับ "ถ้าไม่ใช่ Q แล้วไม่ใช่ P" (If $P \Rightarrow Q$, then $\neg Q \Rightarrow \neg P$) วิธีนี้มักใช้เมื่อการพิสูจน์ตรงทำได้ยาก แต่การพิสูจน์รูปกลับง่ายกว่า เพราะสามารถใช้การปฏิเสธของข้อสรุปมาช่วยวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นได้ วิธีนี้พบได้บ่อยในทฤษฎีจำนวนและโครงสร้างข้อมูล เช่น การพิสูจน์ว่าถ้า n^2 หารด้วย 3 ลงตัวแล้ว n ต้องหารด้วย 3 ลงตัวด้วย

Proof by Contradiction

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) เป็นเทคนิคที่ทรงพลังและใช้ได้กับข้อความทุกชนิด หลักการคือสมมติว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วใช้เหตุผลเชิงตรรกะต่อเนื่องจนได้ผลลัพธ์ที่ขัดแย้งกับข้อเท็จจริงที่ทราบอยู่ หรือแม้แต่ขัดแย้งกับสมมติฐานของตนเอง เมื่อเกิดความขัดแย้งขึ้น แสดงว่าสมมติฐานเดิมต้องผิด ดังนั้นข้อความที่ต้องการพิสูจน์จึงเป็นจริง วิธีนี้มักใช้เมื่อการพิสูจน์โดยตรงซับซ้อนเกินไป ตัวอย่างที่คลาสสิกคือการพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

4.2.4 การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ *there exist*

ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณแบบ "there exists" หรือ $\exists$ เป็นข้อความที่ยืนยันการมีอยู่ของวัตถุใดวัตถุหนึ่งซึ่งทำให้เงื่อนไขเป็นจริง การพิสูจน์ข้อความประเภทนี้จึงมีสองแนวทางหลัก ได้แก่ (1) การพิสูจน์แบบสร้างสรรค์ (constructive proof) ซึ่งแสดงวัตถุที่ต้องการโดยตรง และ (2) การพิสูจน์แบบไม่สร้างสรรค์ (non-constructive proof) ซึ่งพิสูจน์ว่าการไม่มีวัตถุดังกล่าวจะนำไปสู่ความขัดแย้ง แม้ไม่สามารถระบุวัตถุนั้นได้อย่างชัดเจนก็ตาม การแยกแยะระหว่างสองแนวทางนี้ช่วยให้เข้าใจมิติของ "การมีอยู่" ในคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น

4.2.5 การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (ทั่วไป)

แม้ว่าการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) จะถูกใช้เป็นเทคนิคย่อยในหลายบริบท แต่ก็สามารถมองว่าเป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของข้ออ้างใด ๆ ได้เช่นกัน หลักคิดสำคัญคือ "สิ่งที่ขัดแย้งกับความจริงย่อมเป็นเท็จ" ดังนั้น หากเราสมมติว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วการให้เหตุผลของเรานำไปสู่ความขัดแย้ง เช่น ได้ผลลัพธ์ที่ขัดกับนิยาม หรือขัดกับหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ก็

สามารถสรุปได้ว่าข้อความนั้นต้องเป็นจริง วิธีนี้มีพลังมากในกรณีที่ข้อความเกี่ยวข้องกับการมีอยู่ (existence) หรือความเป็นไปไม่ได้ (impossibility)

4.3 ข้อควรคำนึงในการเขียนพิสูจน์

การเริ่มต้นโดยไม่ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ให้ชัดเจน

ในบทพิสูจน์ที่ดี ผู้อ่านควรรู้ทันทีว่าผู้เขียนต้องการพิสูจน์อะไร เช่น ต้องการแสดงว่า “ทุกจำนวนคู่มีรูป $2k$” หรือ “ไม่มีจำนวนเฉพาะคู่ใดนอกจาก 2”

Example 4.3.1. ผิด: “สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $n = 2k$.” (ไม่มีการระบุว่าต้องการพิสูจน์อะไร)
ถูก: “เราต้องการพิสูจน์ว่า ผลคูณของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่ เริ่มจากให้ $n = 2a$ และ $m = 2b$ จากนั้น $nm = 4ab = 2(2ab)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่.”

การใช้ตัวแปรโดยไม่ระบุขอบเขต

หลายครั้งนักศึกษาจะเขียนตัวแปรขึ้นมาโดยไม่บอกว่ามันเป็นจำนวนเต็ม จำนวนจริง หรือจำนวนบวก ซึ่งทำให้ความหมายของพิสูจน์ไม่ชัดเจน

Example 4.3.2. ผิด: “ให้ n^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่.”
ถูก: “ให้ $n \in \mathbb{Z}$ และสมมติว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ เราต้องการพิสูจน์ว่า n เป็นจำนวนคู่.”

การใช้ตัวอย่างแทนการพิสูจน์

การยกตัวอย่างเพียงบางกรณีไม่ถือว่าเป็นการพิสูจน์ เพราะคณิตศาสตร์ต้องการความจริงที่ใช้ได้กับทุกกรณี

Example 4.3.3. ผิด: “เพราะ $2 + 4 = 6$ และ $4 + 6 = 10$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่.”
ถูก: “ให้ $a = 2m$ และ $b = 2n$ จากนั้น $a + b = 2(m + n)$ ซึ่งหารด้วย 2 ลงตัว ดังนั้นผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่เสมอ.”

การเริ่มจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ (ย้อนเหตุผล)

การพิสูจน์ต้องเริ่มจากสมมติฐาน ไม่ใช่จากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เพราะจะกลายเป็นการสมมติว่าคำตอบถูกอยู่แล้ว

Example 4.3.4. **ผิด:** "สมมติว่า n^2 เป็นคู่ ดังนั้น n ต้องเป็นคู่ เพราะเราอยากให้เป็นอย่างนั้น."
ถูก: "สมมติว่า n เป็นคี่ เขียนได้เป็น $n = 2k + 1$ จากนั้น $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ซึ่งเป็นคี่ ดังนั้นหาก n^2 เป็นคู่ n ต้องไม่เป็นคี่."

การละขั้นตอนสำคัญโดยไม่อธิบาย

การพิสูจน์ที่ดีต้องให้เหตุผลต่อเนื่อง ไม่กระโดดจากสมมติฐานไปสู่ข้อสรุปทันที

Example 4.3.5. **ผิด:** "เพราะ $a|b$ ดังนั้น $a|bc$."
ถูก: "เพราะ $a|b$ จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b = ak$ ดังนั้น $bc = a(kc)$ ซึ่งแสดงว่า $a|bc$."

การสลับทิศทางของสมมูล

นักศึกษามักสับสนระหว่างการพิสูจน์แบบ "ถ้า–แล้ว" ($\Rightarrow$) กับแบบ "ถ้าและเฉพาะถ้า" ($\Leftrightarrow$)

Example 4.3.6. **ผิด:** "เพราะ n เป็นคู่ ดังนั้น n^2 เป็นคู่ ดังนั้นกลับกัน n^2 เป็นคู่ $\Rightarrow$ n เป็นคู่."
ถูก: "เราได้พิสูจน์แล้วว่า n เป็นคู่ $\Rightarrow$ n^2 เป็นคู่ ส่วนกลับพิสูจน์ได้โดย contrapositive ว่า ถ้า n^2 เป็นคู่ $\Rightarrow$ n เป็นคู่."

การใช้สัญลักษณ์โดยไม่สอดคล้องกับภาษา

ข้อความคณิตศาสตร์ที่ดีควรเชื่อมโยงระหว่างภาษากับสัญลักษณ์อย่างเหมาะสม หากใช้แต่สัญลักษณ์หรือแต่ภาษาอย่างเดียวจะอ่านยากและเสี่ยงต่อความคลาดเคลื่อน

Example 4.3.7. **ผิด:** "เพราะเท่ากับเลยหารได้ลงตัว." (ไม่ระบุว่าสิ่งใดเท่ากับสิ่งใด)
ถูก: "จาก $n = 2k$ จะได้ว่า n หารด้วย 2 ลงตัว เนื่องจากสามารถเขียนเป็นผลคูณของ 2 กับจำนวนเต็ม k."

การปฏิเสธข้อความผิดรูป

เมื่อปฏิเสธข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ มักผิดเพราะลืมสลับชนิดของตัวบ่งปริมาณ

Example 4.3.8. **ผิด:** ปฏิเสธ "ทุกคนรักคณิตศาสตร์" ด้วย "ไม่มีใครรักคณิตศาสตร์."
ถูก: ปฏิเสธคือ "มีบางคนที่ไม่รักคณิตศาสตร์." ซึ่งสอดคล้องกับสมการตรรกะ $\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$

การไม่แยกกรณีเมื่อต้อง

บางข้อความต้องแยกกรณีเพื่อให้ครบถ้วน โดยเฉพาะเมื่อค่าตัวแปรมีหลายลักษณะ

Example 4.3.9. ผิด: "ผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนเป็นบวกเสมอ."
ถูก: "ถ้าทั้งคู่เป็นบวก ผลคูณเป็นบวก และถ้าทั้งคู่เป็นลบ ผลคูณก็เป็นบวก แต่ถ้าเครื่องหมายต่างกัน ผลคูณจะเป็นลบ."

การไม่ตรวจสอบเงื่อนไขที่ซ่อนอยู่ในนิยาม

นิยามบางอย่างมีข้อจำกัดที่มักถูกมองข้าม เช่น ห้ามหารด้วยศูนย์ หรือฟังก์ชันต้องมีโดเมนที่ชัดเจน

Example 4.3.10. ผิด: "เพราะ $\frac{a}{b} = c$ ดังนั้น $a = bc$." (ไม่ระบุว่า $b \neq 0$)
ถูก: "สมมติว่า $b \neq 0$ และ $\frac{a}{b} = c$ จะได้ว่า $a = bc$."

การเรียนรู้วิธีการพิสูจน์ไม่ได้เป็นเพียงการจดจำรูปแบบของการให้เหตุผล แต่คือการฝึกฝนวิธีคิดที่เป็นระบบ มีเหตุผล และสามารถอธิบายความจริงได้อย่างมั่นใจ ในตอนต้นของบทนี้ เราได้เริ่มจากโครงสร้างพื้นฐานของประโยคตรรกะ เช่น การเชื่อมด้วย "และ" หรือ "หรือ" จากนั้นจึงขยายไปสู่ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ "สำหรับทุกค่า" และ "มีอยู่ค่าใดค่าหนึ่ง" ก่อนจะเรียนรู้วิธีการพิสูจน์รูปแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นการพิสูจน์ตรง การพิสูจน์โดยรูปกลับ หรือการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง ซึ่งล้วนสะท้อนแนวทางของการให้เหตุผลที่มีตรรกะเป็นแกนกลาง

อย่างไรก็ตาม สิ่งที่สำคัญไม่แพ้เทคนิคคือ "การสื่อสารทางคณิตศาสตร์" — การเขียนให้ผู้อ่านเข้าใจว่าคุณกำลังคิดอะไร อยู่บนสมมติฐานใด และสรุปผลอย่างไร หลายครั้งที่พิสูจน์ผิดไม่ได้เพราะตรรกะผิด แต่เพราะไม่ระบุขอบเขตของตัวแปร ไม่แยกกรณี หรือเขียนโดยไม่ระบุว่ากำลังพิสูจน์อะไร ดังนั้น การเขียนพิสูจน์ที่ดีจึงต้องทั้งถูกต้องในเชิงตรรกะและชัดเจนในเชิงภาษา

ท้ายที่สุด การฝึกเขียนพิสูจน์คือการฝึกตั้งคำถามกับสิ่งที่เราคิดว่าจริง — "เรารู้ได้อย่างไรว่ามันจริง?" เมื่อผู้เรียนเริ่มตั้งคำถามเช่นนี้ นั่นคือจุดเริ่มต้นของการคิดเชิงคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง ซึ่งจะกลายเป็นรากฐานของการทำงานด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ การออกแบบอัลกอริทึม และการให้เหตุผลในชีวิตจริงต่อไป

Chapter 5

Recursion and Mathematical Induction

Chapter 6

Methods of Proof

Part II

Discrete Mathematics with Programming

Chapter 7

Set Theory and Its Family

ในบทที่ 2 เราได้เกริ่นถึงบทบาทของสิ่งต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ดีสครีตเพื่อที่จะใช้ในการอธิบายสรรพสิ่งต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมเพื่อนำไปสู่การให้เหตุผล เช่นเราใช้เซตในการอธิบายสถานภาพหรือการเป็นสมาชิกของสิ่งต่าง ๆ และเราอธิบายหลักการคิดเชิงความจริงหรือเท็จ รวมถึงวิธีการแปลภาษาด้วยตรรกศาสตร์ เราสามารถพูดถึงการใช้สมาชิกต่าง ๆ มาคำนวณหรือสร้างเป็นสมาชิกตัวอื่นโดยใช้ฟังก์ชัน และสามารถพูดถึงการเชื่อมโยงกันด้วยสิ่งที่เรียกว่าความสัมพันธ์

ทั้งนี้ ในบทดังกล่าวจะยังไม่ได้พูดถึงรายละเอียดเชิงเทคนิค(ทางคณิตศาสตร์)ของสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นนิยาม หรือการพิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ ซึ่งเราจะมากล่าวถึงกันในบทนี้ โดยเราจะเริ่มจากเซต ซึ่งแท้ที่จริงแล้วสิ่งต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ก็ถูกสร้างขึ้นมาจากเซตทั้งสิ้น จึงมีศาสตร์เฉพาะทางที่ศึกษาเฉพาะการใช้เซตเพื่ออธิบายคณิตศาสตร์ เรียกว่า **ทฤษฎีเซต (set theory)** รวมไปถึงนิยามความสัมพันธ์และฟังก์ชันตามมา

จริง ๆ แล้ว เนื้อหาในบทนี้อาจไม่ใช่ส่วนที่ผู้เรียนจะเห็นประโยชน์เชิงประยุกต์ได้โดยตรงเหมือนบทอื่น ๆ ที่จะได้เรียนต่อไป เช่น ทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีกราฟ หรือการเวียนเกิด ซึ่งสามารถเชื่อมโยงกับปัญหาในวิทยาการคอมพิวเตอร์ได้อย่างชัดเจน อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจในเซตและโครงสร้างของมันเป็นสิ่งที่เปรียบเสมือนรากฐานของคณิตศาสตร์ทั้งหมด เพราะแนวคิดเรื่อง “การเป็นสมาชิก” และ “การสร้างวัตถุใหม่จากวัตถุที่มีอยู่เดิม” ปรากฏอยู่ในทุกแขนงของคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์

ดังนั้น บทนี้จึงควรถูกมองว่าเป็นการฝึกสร้างกรอบความคิดเชิงโครงสร้าง (structural thinking) มากกว่าการเรียนรู้เพื่อนำไปคำนวณโดยตรง อีกทั้งยังเป็นบทที่เหมาะอย่างยิ่งสำหรับการฝึกฝนทักษะการให้เหตุผลและการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ดีสครีต และจะกลายเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับบทต่อ ๆ ไปของรายวิชานี้

7.1 เซต

ในเบื้องต้น เราจะมองว่าเซตคือสิ่งที่เราเอาไว้ใช้อธิบายกลุ่มของสิ่งของเพื่อที่จะบอกว่าใครอยู่หรือไม่อยู่ในกลุ่มดังกล่าว โดยจะกล่าวว่าการอยู่ในกลุ่มคือการเป็นสมาชิกของเซต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \in A$ แทนการบอกว่า a เป็นสมาชิกของเซต A และเราสามารถบรรยายเซตของสิ่งที่สนใจได้ในลักษณะ

$$\{x \in \mathcal{U} \mid \text{คุณลักษณะเกี่ยวกับ } x\}$$

เพื่อระบุว่าเราสนใจสมาชิก x จากเซตที่ตั้งต้นไว้ $\mathcal{U}$ (ซึ่งเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์) และสอดคล้องเงื่อนไขเกี่ยวกับคุณสมบัติที่ระบุไว้ โดยที่เราอาจจะไม่ระบุเอกภพสัมพัทธ์ก็ได้ในกรณีที่ทราบข้อตกลงกันไว้เรียบร้อยในบริบทที่กำลังกล่าวถึงแล้ว และเซตสองเซตเท่ากัน $A = B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกเหมือนกันทุกตัว กล่าวคือ

$$A = B \iff \underline{\hspace{8cm}}$$

อย่างไรก็ตาม ในทางทฤษฎีเซต (set theory) เราไม่ได้เริ่มต้นด้วย “นิยามของคำว่าเซต” อย่างที่ทำกับคำอื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ เหตุผลก็เพราะว่า หากเราพยายามนิยามว่า “เซตคือสิ่งที่มีคุณสมบัติแบบใดแบบหนึ่ง” เราจะตกอยู่ในข้อขัดแย้งในตัวเองได้ เช่น ข้อขัดแย้งของรัสเซล (Russell’s paradox) ดังนั้น แทนที่จะนิยามว่าอะไรคือเซต เราจึงเริ่มต้นด้วยการยอมรับสัจพจน์ (axioms) ชุดหนึ่งที่บอกเพียงว่า “อะไรบ้างถือเป็นเซตเบื้องต้น” และ “เราสามารถสร้างเซตใหม่จากเซตที่มีอยู่ได้อย่างไร” เช่น สัจพจน์ของเซอร์เมโล–แฟรงเคิล (Zermelo–Fraenkel Axioms, ZF) ที่เป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ในปัจจุบัน เราจึงพูดได้เพียงว่าเซตคือสิ่งที่ทำงานอยู่ภายใต้กฎเหล่านี้ ไม่ใช่สิ่งที่เรานิยามขึ้นโดยตรง แต่เป็นสิ่งที่เรายอมรับให้ “มีอยู่” ตามสัจพจน์ที่ใช้สร้างจักรวาลทางคณิตศาสตร์ของเรา

ในเมื่อได้กล่าวถึง Russell’s paradox มาแล้ว ก็อยากขอพามาช่วยกันขบคิดซักหน่อยว่าจะเกิดอะไรขึ้นถ้าเรายอมรับว่าอะไรก็ตามที่เป็นกลุ่มของสิ่งของถือว่าเป็นเซตเสมอ

คุณสมบัติ 7.1.1: Russell’s paradox

ระบบเซตที่ให้นิยามของเซตว่า “*เซตคือกลุ่มของสิ่งของใด ๆ*” (ซึ่งระบบดังกล่าวเรียกว่าระบบ naive set theory) เกิดข้อขัดแย้ง

ก่อนจะไปที่บทพิสูจน์ของคุณสมบัติดังกล่าวจะพามาคิดผ่านคำถามดังต่อไปนี้

1. ลองพิจารณาประโยค “ร้านที่โกนหนวดให้เฉพาะคนที่ไม่โกนหนวดตัวเอง” ใครจะโกนหนวดให้ช่างโกนหนวด?

2. ถ้าสมมติให้มองว่าเอกภพสัมพัทธ์ที่เรากำลังสนใจคือเซตของคนทั้งหมดในหมู่บ้าน และสมมติว่ากำลังพิจารณาช่างโกนหนวดคนหนึ่ง จงเขียนอธิบายเซตของคนที่ช่างโกนหนวดโกนหนวดให้ (ซึ่งเป็นเซตภายใต้ระบบ naive set theory) ในลักษณะภาษาคณิตศาสตร์
3. เซตที่ได้จากข้อที่ผ่านมานี้เป็นสมาชิกของตัวเองหรือไม่?
4. จะได้ในท้ายที่สุดว่าเซตดังกล่าวทำให้เกิดความขัดแย้ง เราจะยังสามารถนิยาม "เซตของทุกสิ่งที่มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน" ได้หรือไม่? ถ้าไม่ เราควรมีหลักเกณฑ์แบบใดมาควบคุมการสร้างเซตแทน?

บทพิสูจน์.[Proof of Russell's Paradox]
Hint: พิจารณาเซตที่นิยามได้จากคำถามชวนคิดข้อ 2

□

หลังจากเราพบว่าการนิยามเซตอย่างอิสระอาจนำไปสู่ความขัดแย้ง เช่น ในกรณีของข้อขัดแย้งของรัสเซล คำถามสำคัญจึงเกิดขึ้นว่า “แล้วเราจะนิยามเซตอย่างปลอดภัยได้อย่างไร?” นักคณิตศาสตร์จึงหันกลับมาทบทวนวิธีคิดพื้นฐานของตนเองใหม่ทั้งหมด แทนที่จะเริ่มจากแนวคิดว่า “เซตคือสิ่งที่มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน” ซึ่งเปิดช่องให้เกิดความย้อนแย้ง พวกเขาเลือกที่จะเริ่มจาก “สิ่งที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์” หรือที่เรียกว่า *สัจพจน์* (axioms)

แนวทางนี้นำไปสู่การสร้างระบบที่เรียกว่า *ทฤษฎีเซตของเซอร์เมโล–แฟรงเคิล* (Zermelo–Fraenkel Set Theory) ซึ่งเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ในปัจจุบัน แทนที่จะบอกว่าอะไรคือเซต ระบบนี้กำหนดกฎเกณฑ์ว่าหากเรามีเซตอยู่บางเซตแล้ว เราสามารถสร้างเซตใหม่ได้อย่างไรบ้าง เช่น สัจพจน์ของการเป็นสมาชิกของเซตว่าง สัจพจน์ของเซตเพาเวอร์ (power set) หรือสัจพจน์ของการรวม (union) เป็นต้น ภายใต้ระบบนี้เราจะไม่สามารถนิยาม “เซตของทุกเซต” ได้อีกต่อไป เพราะนั่นจะละเมิดขอบเขตของสัจพจน์และนำไปสู่ความขัดแย้งแบบเดิม

แนวคิดนี้อาจดูเป็นเพียงการจำกัดเสรีภาพของการนิยาม แต่แท้จริงแล้วคือจุดเริ่มต้นของ “ความมั่นคงเชิงตรรกะ” ของคณิตศาสตร์ยุคใหม่ เพราะมันทำให้เรามั่นใจได้ว่าทุกสิ่งที่เราพิสูจน์ต่อจากนี้ ล้วนตั้งอยู่บนระบบที่ไม่ขัดแย้งในตัวเองและนี่คือเหตุผลว่าทำไมในการศึกษาวิชาเซต เราจึงไม่เริ่มต้นด้วยนิยามของคำว่าเซต แต่เริ่มต้นจากสัจพจน์ที่กำหนดขอบเขตของสิ่งที่เราจะเรียกว่าเซตแทน

7.1.1 เซตว่าง

แต่ก่อนอื่น จะขอเริ่มจากเซตที่เป็นเซตตั้งต้นและมั่นใจว่าเป็นเซตแน่นอนซึ่งคือ เซตว่าง (empty set) ที่มีสัจพจน์ของเซตว่างกล่าวว่ามีเซตหนึ่งเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย โดยให้สัญลักษณ์ของเซตว่างคือ $\varnothing$ กล่าวคือ ประโยค $x \in \varnothing$ จะเป็นเท็จเสมอไม่ว่าจะกล่าวถึงสมาชิก x ใด ๆ ก็ตาม (จะสังเกตว่าเราไม่ได้นิยามว่าเซตว่างคืออะไร แต่เป็นเซตที่ถูกอธิบายปากเปล่าว่าคืออะไร และมีตัวตนโดยอาศัยสัจพจน์ไม่ใช่การนิยามทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา)

คุณสมบัติ 7.1.2: ความเป็นเอกลักษณ์ของเซตว่าง

ถ้า E เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย (คือ ไม่มี x ใดที่ $x \in E$) แล้วจะได้ว่า $E = \varnothing$

7.1.2 เซตย่อยและเซตกำลัง

นิยาม 7.1.3: เซตย่อย

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยของ B ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ A จะต้องเป็นสมาชิกของ B ด้วย กล่าวคือ

$$A \subseteq B \iff \underline{\hspace{6cm}}$$

Example 7.1.4. กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงยกตัวอย่างเซตที่เป็นเซตย่อยของ A และเซตที่ไม่ใช่เซตย่อยของ A มาอย่างละ 1 เซตพร้อมทั้งพิสูจน์ให้เห็นจากนิยาม

Exercise 7.1.5. ให้ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ and $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 49\}$ จงพิสูจน์ว่า $B \subseteq A$ และพิสูจน์ว่า $A \nsubseteq B$

Exercise 7.1.6. สมบัติถ่ายทอดของเซตย่อย กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

Exercise 7.1.7. เซตว่างเป็็นเซตย่อยของทุก ๆ เซต กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\varnothing \subseteq A$

นิยาม 7.1.8: เซตกำลัง

กำหนดให้ A เป็นเซต เราจะนิยามเซตกำลัง (power set) ของ A ว่าเป็นเซตของเซตย่อยทั้งหมดของเซต A

$$\mathcal{P}(A) := \{\underline{\hspace{8cm}}\}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า

$$\mathcal{P}(A) := \{\underline{\hspace{11cm}}\}$$

Exercise 7.1.9. ถ้าให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงพิสูจน์ว่า $\{1, 3\}\} \in \mathcal{P}(A)$ และพิสูจน์ว่า $\{0, 3\}\} \notin \mathcal{P}(A)$

Exercise 7.1.10. จำนวนเซตย่อยทั้งหมด สำหรับเซต A ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าจำนวนเซตย่อยทั้งหมด

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

คำใบ้: ลองตั้งข้อสังเกตการสร้างแบบเวียนเกิด เพื่อพิสูจน์อุปนัย

7.1.3 การดำเนินการของเซต

นิยาม 7.1.11: เซตกำลัง

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต การดำเนินการของเซตต่าง ๆ นิยามเป็นภาษาพูดดังนี้

- Complement: A' คือเซตของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ไม่อยู่ใน A
- Union: $A \cup B$ คือเซตที่มีสมาชิกจาก A หรือ B หรือทั้งคู่
- Intersection: $A \cap B$ คือเซตที่ของสมาชิกร่วมกันระหว่างเซต A และเซต B

ซึ่งสามารถเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A' &= \{\underline{\hspace{8cm}}\} \\ A \cup B &= \{\underline{\hspace{8cm}}\} \\ A \cap B &= \{\underline{\hspace{8cm}}\} \end{aligned}$$

Example 7.1.12. ตัวอย่างคำนวณ กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ และ $D = \{7, 8, 9\}$ โดยที่เอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ จงหา

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $B \cap C$
4. $A \cap D$
5. $(B \cup C)'$
6. $(D \cap C') \cup (A \cap B)'$
7. $\varnothing \cup C$
8. $\varnothing \cap C$

Exercise 7.1.13. Prove that if $A \subseteq B$, then $A \cup B = B$ and $A \cap B = A$.

Exercise 7.1.14. Prove that $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Exercise 7.1.15. Prove that $\varnothing \cup C = C$ และ $\varnothing \cap C = \varnothing$.

Exercise 7.1.16. Prove that $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7.2 ความสัมพันธ์

7.2.1 คู่อันดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน และความสัมพันธ์

7.2.2 ความสัมพันธ์ประเภทต่าง ๆ

7.2.3 ความสัมพันธ์สมมูล และชั้นสมมูล

7.3 ฟังก์ชัน

7.3.1 ฟังก์ชัน โดเมน และเรนจ์

7.3.2 ประเภทของฟังก์ชัน

7.3.3 ฟังก์ชันประกอบ

7.4 ทฤษฎีเซตเชิงการนับ

7.4.1 การสมมูลกันเชิงการนับของเซต และคาร์ดินอลของเซต

7.4.2 Cantor's Theorem

Chapter 8

Number Theory

ทฤษฎีจำนวนเป็นหัวข้อที่จะได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนเต็มที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัวและตัวประกอบ โดยจะเริ่มศึกษาจากการหารลงตัวก่อน แล้วจึงนำไปนิยามจำนวนประกอบและจำนวนเฉพาะ และนำไปสู่ทฤษฎีสำคัญที่เรียกว่า Fundamental Theorem of Arithmetic ซึ่งพูดถึงการแยกตัวประกอบของจำนวนประกอบด้วยจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นทฤษฎีสำคัญที่ทำให้เราสามารถศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนประกอบได้ เช่นจำนวนของตัวประกอบ และการตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะ

และหลังจากที่ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวน เราจะพูดถึงความสัมพันธ์ของสองจำนวน โดยเริ่มที่การนิยามการหารของจำนวนเต็ม แล้วนำไปสู่เรื่องตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อยเพื่อศึกษาการมีตัวประกอบร่วมกันของจำนวนตั้งแต่สองจำนวนเป็นต้นไป และจบด้วยเรื่องการสมภาคที่เกี่ยวข้องกับระบบของเศษเหลือรวมไปถึงการนำไปประยุกต์ใช้ในวิทยาการการเข้ารหัส (cryptography)

โดยทั่วไปแล้ว หัวข้อนี้มักจะถูกใช้เป็นหัวข้อเพื่อฝึกเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรายวิชาที่เรียนเกี่ยวกับพื้นฐานการเขียนพิสูจน์หรือการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์[1] เพราะเป็นหัวข้อที่ทำความเข้าใจนิยามหรือคุณสมบัติได้ง่าย อีกทั้งเป็นสิ่งที่ผู้เรียนคุ้นเคยกันมาตั้งแต่สมัยเด็ก (อย่างน้อยทุกคนที่เปิดอ่านหนังสือเล่มนี้น่าจะเคยเรียนวิธีการตั้งหารยาวเพื่อหาผลหารและเศษมาก่อน) เลยทำให้ผู้เรียนสามารถมุ่งความสนใจไปที่วิธีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้มากกว่า แทนที่จะต้องมาทั้งทำความเข้าใจนิยามที่บางครั้งก็ซับซ้อน และต้องฝึกให้เหตุผลไปพร้อมกัน จึงเป็นการดีที่ผู้อ่านที่ยังไม่คุ้นเคยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะใช้บทนี้เป็นแบบฝึกหัดในการเขียนพิสูจน์

[1]เช่นเด็กหลักสูตรคณิตศาสตร์จะมีเรียนวิชา Principle of Mathematics หรือเด็กหลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็จะมีวิชา Discrete Mathematics เป็นรายวิชาดังกล่าว

8.1 การหารลงตัว

เราจะเริ่มจากแนวคิดพื้นฐานที่สุดของทฤษฎีจำนวนซึ่งคือ **การหารลงตัว** ซึ่งถ้าย้อนกลับไปในวัยเด็ก เราจะเริ่มจากการเรียนรู้การหารจำนวนเต็มโดยจดจำวิธีการตั้งหารทั้งวิธีหารสั้นและหารยาวเพื่อให้เราหาผลหารและเศษการหารกันได้เป็น โดยที่เราไม่ได้สนใจว่าจริง ๆ แล้วการหารคืออะไรกันแน่ เพียงแต่มองในมุมมองเชิงการคำนวณว่าคือการแบ่งของ

ทั้งนี้ ถ้าจะต้องการศึกษาเกี่ยวกับการหารลงตัวในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ก็คงไม่สะดวกนักถ้าจะบอกว่าเราหารลงตัวถ้าตั้งหารยาวหรือหารสั้นออกมาแล้วได้เศษเป็น 0 เราจึงจำเป็นที่จะต้องนิยามการหารลงตัวในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้พิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ ต่อได้ง่าย โดยเราจะเห็นว่าเพียงแค่มองมุมกลับกัน จากการถามว่ามีส้ม 10 ผล แบ่งให้คน 5 คนจะได้คนละกี่ผล (มองแบบการหาร) เป็นการมองว่า ถ้าเรามีคน 5 คน และแต่ละคนได้รับส้มไป x ผล แล้วต้องใช้ส้ม 10 ผล ซึ่งเราเปลี่ยนรูปแบบประโยคได้เป็น $5x = 10$ ซึ่งถ้ามีจำนวนส้ม x ผลดังกล่าวที่ทำให้เราสามารถแบ่งส้มกันได้ลงตัวพอดี เราก็จะกล่าวว่า 10 หารด้วย 5 ลงตัวนั่นเอง ทั้งนี้ จะพบว่าหลักสำคัญของการพิจารณาการหารลงตัวก็คือการหา x ดังกล่าวนั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน เพียงแต่พิจารณาในกรณีทั่วไป เราจะนิยามการหารลงตัวได้ดังนี้

นิยาม 8.1.1: Divisibility

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า m หารด้วย n ลงตัวก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = nk$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n|m$

จากตัวอย่างด้านบน เราจะกล่าวได้ว่า $5|10$ เพราะเราสามารถให้ส้มคนละ 2 ผลได้ เพื่อแบ่งส้ม 10 ผลให้ 5 คนได้พอดี นั่นคือ $k = 2$ นั่นเองที่ทำให้ $10 = 5 \times 2$

คำเตือน

ในครั้งนี้จะยังคงขอเตือนเรื่องตัวบ่งปริมาณการมีอีกสักรอบ ว่าการที่เราทราบว่า $n|m$ นั้น เราเพียงแค่ทราบว่าเรามี k สักตัวหนึ่งที่ทำให้สมการ $m = nk$ เป็นจริง เพียงแต่ในการเขียนพิสูจน์ที่หลาย ๆ อย่างเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า เราจะไม่สามารถระบุค่าของตัวแปร k ที่เกิดขึ้นมาจากการอ้างเหตุผลของการหารลงตัวได้ เราทราบเพียงแค่ว่า $m = nk$ (หรือทดไว้ในหัวเท่านั้นว่าจริง ๆ มันก็คือ $\frac{m}{n}$ แต่เขียนไม่ได้ในทฤษฎีจำนวน) แล้วนำค่า k นี้ไปใช้งานต่อในส่วนอื่น ๆ ของบทพิสูจน์
ในทางกลับกัน แต่ถ้าจะต้องการให้เหตุผลเพื่อสรุปการหารลงตัว สิ่งที่เราต้องทำคือการทดหาจำนวนเต็มสักตัวหนึ่ง (อาจจะเป็นตัวเลขหรือกลุ่มของตัวแปรก็ได้) ที่เมื่อนำมาแทนที่ไว้ในตำแหน่งของ k เพื่อคูณกับ n แล้วได้ผลคูณออกมาเป็น m

Example 8.1.2. จงพิสูจน์ว่า $25|300$

Solution. จากนิยาม จะเห็นว่าสิ่งที่เราต้องการคือจำนวนเต็มสักจำนวนหนึ่งที่เมื่อนำไปคูณกับ 25 แล้วได้ 300 ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยการทดเลขแบบเด็ก ๆ $300/25 = 12$ นั่นคือเราทราบแล้วว่าจำนวนดังกล่าวคือ 25 จะเหลือเพียงแค่นำไปเขียนพิสูจน์
บทพิสูจน์. เพราะ $300 = 25 \times 12$ จึงได้ว่า $25|300$ $\square$

Example 8.1.3. จงพิสูจน์ว่า $25 \nmid 310$

Solution. ในทำนองเดียวกัน เราต้องหาจำนวนเต็มสักจำนวนหนึ่งที่เมื่อนำไปคูณกับ 25 แล้วได้ 310 ซึ่งถ้าลองทดเลขคำนวณดูจะพบว่า $310/25 = 12.4$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนนับ ดังนั้นเราก็พอจะเดาได้(ถึงแม้จะชัด)ว่าควรที่จะหารไม่ลงตัว ทว่าเหตุผลการหารแล้วไม่เป็นจำนวนเต็มนี้ใช้ในการเขียนพิสูจน์ไม่ได้ เพราะการเขียนพิสูจน์ว่าหารไม่ลงตัว ต้องแสดงว่าไม่ว่าหยิบจำนวนเต็มใดมาคูณกับตัวหารจะไม่ได้ตัวตั้ง
บทพิสูจน์. สมมติให้มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $310 = 25n$ (เรากำลังจะพิสูจน์ด้วยการหาข้อขัดแย้ง)
ซึ่งเราจะเห็นว่า $310 = 25 \times 12 + 10$
ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} 25n &= 25 \times 12 + 10 \\ 25n - 25 \times 12 &= 10 \\ 25(n-12) &= 10 \end{aligned}$$

จากข้อสังเกตว่าถ้า x เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq 25x < 25$ จะได้ว่า $x = 0$
และเพราะ $0 \leq 10 = 25(n-12) < 25$ จึงได้ว่า $n - 12 = 0$
ดังนั้น จะได้ว่า $10 = 25(n-12) = 25 \times 0 = 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
จึงได้ข้อสรุปว่า ไม่มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $310 = 25n$ $\square$
หลังจากที่เรานิยามการหารลงตัวให้สามารถนำไปใช้ในการให้เหตุผลและเขียนพิสูจน์ได้แล้วนั้น(แทนที่จะบอกวิธีการหาผลหารและเศษแบบตั้งหารแล้วดูว่าเศษเป็นศูนย์หรือไม่) เราจะมาเริ่มศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการหารลงตัวกันบ้าง ซึ่งการหารลงตัวเป็นความสัมพันธ์บนจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจะเริ่มจากพิจารณากันก่อนว่าคุณสมบัติใดของความสัมพันธ์ที่ความสัมพันธ์การหารลงตัวสอดคล้องบ้าง

Exercise 8.1.4. จงเขียนประโยคที่กล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ของการหารลงตัวตารางนี้ และพิจารณาว่าจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ (ดูเฉลยได้ใน Proof Part) แต่ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

คุณสมบัติ	นิยาม	เขียนโดยใช้การหารลงตัว	จริง	ไม่จริง
สะท้อน	$\forall x, xRx$			
ถ่ายทอด	$\forall x \forall y \forall z, xRy \land yRz \to xRz$			
สมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \to yRx$			
อสมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \to \neg yRx$			
ปฏิสมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \land yRx \to x = y$			

Solution. ...

นอกจากนั้น เรายังได้คุณสมบัติต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

คุณสมบัติ 8.1.5: คุณสมบัติการหารลงตัว

กำหนดให้ m, n, p เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่า

1. $1|m$ และ $m|m$
2. ถ้า $m \neq 0$ แล้ว $m|0$
3. ถ้า $m|n$ แล้ว $m|np$
4. ถ้า $p \neq 0$ และ $m|n$ แล้ว $pm|pn$
5. ถ้า $m|n$ และ $m|p$ แล้ว $m|(n+p)$
6. ถ้า $m|n$ และ $m|p$ แล้ว $m|(xn+yp)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม x, y
7. ถ้า $m|n$ แล้ว $|m| \leq |n|$

แนวคิดของทฤษฎีและแนวคิดการเขียนพิสูจน์: [2]

1. ในข้อนี้ค่อนข้างตรงไปตรงมาเหมือนที่เคยท่องกันตอนเด็ก ๆ ว่า 1 หารทุกจำนวนลงตัว เพราะ 1 คูณอะไรก็ได้ตัวมันเอง กล่าวแบบรัดกุมคือ $1 \cdot n = n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n
2. และในทำนองเดียวกัน เมื่อเราใช้ 0 เป็นตัวตั้ง เราน่าจะตอบกันได้ทันทีว่า 0 คูณอะไรก็ได้ 0

[2] ไม่ใช่การเขียนพิสูจน์ เป็นแค่แนวคิด

3. ในข้อนี้นั้น แนวคิดตั้งต้นมาจากการที่เปรียบเสมือนเรามีเศษส่วนที่ตัดกันได้หมดอยู่แล้ว ($\frac{n}{m}$ ตัดกันได้หมด) ต่อให้เราคูณตัวตั้งเพิ่มเข้าไปด้วยอะไร (p) ก็ตาม เราก็ควรที่จะยังคงตัดได้ $\frac{np}{m}$ ลงตัวเช่นเดิมด้วยการตัดคู่เดิม ซึ่งถ้าเรามองในแง่การเขียนพิสูจน์ เปรียบเสมือนเรามีจำนวนหนึ่งที่คูณตัวหารได้ตัวตั้งอยู่แล้ว ถ้าสนใจกับตัวตั้งที่เพิ่มขึ้น p เท่า ผลหารก็ควรจะเพิ่มขึ้น p เท่าเช่นกัน ซึ่งเรากล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่าการหารลงตัวถูกรักษาไว้ภายใต้การคูณตัวตั้ง (divisibility is preserved under numerator multiplication)

4. เหมือนการคูณทั้งเศษและส่วนของเศษส่วนที่ยังคงให้ค่าผลหารเท่าเดิมอยู่ $\frac{n}{m} = \frac{pn}{pm}$

5. เปรียบเสมือน $\frac{n+p}{m} = \frac{n}{m} + \frac{p}{m}$ โดยความหมายของคุณสมบัตินี้คือการหารลงตัวยังคงถูกรักษาไว้ภายใต้การบวกของตัวตั้ง

6. เราเรียกพจน์ $xn + yp$ ว่าผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ซึ่งเป็นผลขยายมาจากข้อ 3 และข้อ 5

สิ่งที่อธิบายในแต่ละข้อ เป็นเพียงแนวคิดเชิงที่มา(การตั้งข้อสังเกต) และแนวคิดเชิงการให้เหตุผล(แนวทางการเขียนพิสูจน์) ไม่ใช่การเขียนพิสูจน์ โดยประเด็นสำคัญที่สุดคือในการเขียนพิสูจน์เราไม่สามารถใช้เศษส่วนในแง่การคำนวณได้ (เช่น $\frac{n}{m} = \frac{pn}{pm}$ เป็นต้น)

8.2 ขั้นตอนวิธีการหาร: Division Algorithm

หัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการหารลงตัว หรือการเป็นตัวประกอบของจำนวนเต็มไป แต่ก็จะพบว่าในบางครั้งเราอยากจะอธิบายการหารได้กับทุกคู่ของจำนวนเต็ม กล่าวคือ เราอยากขยายไอเดียการหารให้ทั่วไปมากขึ้น ไม่ได้สนใจเพียงแค่การหารลงตัวหรือไม่ลงตัวที่เป็นคุณสมบัติที่ขึ้นกับจำนวนเต็มที่เป็นตัวตั้งเท่านั้น

และถ้านึกย้อนไปในวัยเด็ก (อีกครั้ง) หลายคนน่าจะจำกันได้ดีว่าพวกเราเริ่มเรียนการหารกันด้วยการตอบผลหารและเศษเหลือจากการหาร แต่สิ่งที่พวกเราได้เรียนกันในวัยเด็ก เป็นเพียงแค่วิธีการเขียนเพื่อให้เราในวัยเด็กที่ยังไม่มีแนวคิดแบบนามธรรมสามารถทำตามได้ กล่าวคือเราถูกคาดหวังเพียงแค่หาคำตอบที่ถูกต้องให้ได้ก่อน แต่ไม่ได้เรียนว่าทำไมทำแบบนั้นถึงทำได้ หรืออะไรคือที่มาของแนวคิด

นอกจากนั้น จะสังเกตว่าวิธีการที่พวกเราได้เรียนโดนจำกัดอยู่แค่จำนวนเต็มบวก กล่าวคือ ถ้าตัวตั้งหรือตัวหารเป็นจำนวนเต็มลบ เราจะยังคำนวณหาผลหารและเศษกันไม่เป็นอยู่ดี (ตัวอย่างเช่นจงหาผลหารของ -21 หารด้วย 5) ในครั้งนี้ เราจึงจะนำแนวคิดเรื่องผลหารและเศษเหลือที่คำนวณกันได้เก่งมากกับจำนวนบวก มาเขียนนิยามกันในรูปแบบคณิตศาสตร์ เพื่อให้เราสามารถศึกษาประเด็นที่เกี่ยวกับผลหารและเศษเหลือได้ทั่วไปและเป็นคณิตศาสตร์มากขึ้น

แต่โชคดี! ที่อย่างน้อย พวกเราก็ได้เรียนสิ่งที่เรียกว่าการตรวจสอบผลหารด้วยวิธีการ

$$\text{ตัวตั้ง} = \text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร} + \text{เศษ}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้ว สิ่งนี้ก็คือนิยามของการหารที่ทำให้พวกเราสามารถนิยามการหารของจำนวนเต็มได้ทั่วไปมากขึ้นด้วยการหาผลหาร และเศษเหลือมาเติมในสมการ แต่ทั้งนี้ ก่อนนิยามสิ่งใด ๆ ก็ตามในคณิตศาสตร์ (เช่นในที่นี้เรากำลังจะนิยามสิ่งที่เรียกว่า ผลหาร และเศษเหลือ) สิ่งหนึ่งที่เราต้องพิจารณากันก่อนก็คือการมีค่าได้จริง (ไม่ใช่พูดได้บ้างไม่ได้บ้าง) กับการมีเพียงหนึ่งเดียว (เพราะกำลังจะตั้งชื่อ: well-defined)

บทตั้ง 8.2.1: การมีผลหารและเศษเหลือ

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $n \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้นที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |n|$

นิยาม 8.2.2: Division Algorithm

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $n \neq 0$ แล้ว q และ r จากบทตั้ง 8.2.1 ว่าผลหาร (quotient) และเศษเหลือ (remainder) ตามลำดับ

บทพิสูจน์ของ Exercise 8.1.4

บทพิสูจน์. content... □

บทพิสูจน์ของคุณสมบัติ 8.1.5

บทพิสูจน์. content... □

บทพิสูจน์ของบทตั้ง 8.2.1

บทพิสูจน์. เราจะพิสูจน์การมี q และ r ด้วยการทำอุปนัยบนตั้วแปรจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $n > 0$ (ทำไม?:แบบฝึกหัด 1) และหลังจากที่พิสูจน์การมีแล้ว เราจะพิสูจน์การมีหนึ่งเดียวในลำดับต่อไป

พิสูจน์การมี เมื่อกำหนดให้ $m = 0$ (ขั้นฐานของ m) ซึ่งกรณีนี้เป็นกรณีที่ง่ายสำหรับทุก ๆ n เพราะ $0 = n \times 0 + 0$ นั่นคือเราสามารถพิสูจน์ขั้นฐานของ m ได้แล้ว ต่อไปเราจะพิสูจน์ขั้นอุปนัยของ m กัน

พิจารณากรณีที่ $m > 0$ สมมติให้สิ่งที่เราพิจารณากันอยู่ เป็นจริงสำหรับ m กล่าวคือสำหรับทุก ๆ $n > 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r โดยที่ $0 \leq r < n$ ที่ทำให้ $m = nq + r$ และเรากำลังจะพิสูจน์สำหรับกรณี $m + 1$ โดยที่เราจะแยกพิจารณาตามเศษการหารเป็น 2 กรณี[3] ดังนี้ (1) ถ้า $0 \leq r \leq n - 2$ และ (2) ถ้า $r = n - 1$

กรณีที่ 1) $0 \leq r \leq n - 2$: จะได้ว่า $m + 1 = nq + r + 1 = nq + (r + 1)$ โดยที่ $0 < 0 + 1 \leq r + 1 \leq n - 2 + 1 = n - 1$ กล่าวคือ มีผลหาร q เดิม และมี $r + 1$ เป็นเศษการหาร

กรณีที่ 2) $r = n - 1$: จะได้ว่า $m + 1 = nq + r + 1 = nq + n - 1 + 1 = nq + n = n(q + 1) + 0$ กล่าวคือ มี $q + 1$ เป็นผลหาร และเหลือเศษการหารเป็น 0 ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขการหารแน่นอน

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่าสำหรับจำนวนนับ m ใด ๆ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะมี q และ r ที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < n$ และในลำดับถัดไป เราจะพิสูจน์การมีหนึ่งเดียวกัน

พิสูจน์การมีเพียงหนึ่งเดียว กำหนดให้มีจำนวนเต็ม q' และ r' อีกชุดที่ทำให้ $m = nq' + r'$ โดยที่ $0 \leq r' < n$ กล่าวคือ $nq + r = nq' + r'$ ซึ่งจะได้ว่า $n(q - q') = r' - r$ แต่เนื่องจาก $r, r' \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ จะได้ว่า $0 \leq |r' - r| < n$ ทำให้ได้ว่า $0 \leq n|q' - q| < n$ จึงสรุปได้ว่า $|q' - q| = 0$ กล่าวคือ $q = q'$ และยังทำให้ได้ตามมาว่า $r' - r = n(q - q') = n \times 0 = 0$ จึงได้ว่า $r = r'$ □

---

[3] เพราะการบวก 1 เพิ่มให้ m กลายเป็น $m + 1$ จะกระทบกับเศษ $n - 1$ ที่จะกลายเป็น n ซึ่งเป็นเศษการหารของตัวหาร n ไม่ได้

8.3 Theory Exercise

1. (คำถามต่อเนื่องจากพิสูจน์ของบทตั้ง 8.2.1) สำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $n > 0$ ซึ่ง $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |n|$ จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนเต็ม q' และ r' โดยที่ $0 \leq r' < |n|$ ที่ทำให้ $-m = nq' + r'$ (และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ $m = (-n)q' + r'$ และ $-m = (-n)q' + r'$)

2. จงพิสูจน์บทตั้ง 8.2.1 ส่วนการมีโดยใช้หลักการการจัดอันดับดี

8.4 programming: การหารลงตัวที่เขียนกันเองด้วยนิยาม

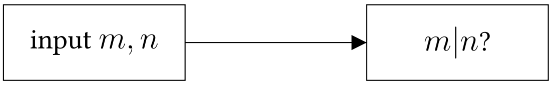

Figure 8.1: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ m, n และ output คือบอกว่าหารลงตัวหรือไม่

เราจะเริ่มจากนิยามแรกสุดของทฤษฎีจำนวน นั่นคือการหารลงตัวของจำนวนเต็ม ซึ่งจริง ๆ แล้วนั้นเราสามารถตรวจสอบว่าจำนวน 2 จำนวนเช่น m และ n ที่ให้มานั้นหารลงตัวกันหรือไม่ได้โดยง่ายผ่านตัวดำเนินการ “%” ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ built-in ของ Python เพื่อหาเศษเหลือจากการหาร โดยตรวจสอบว่าเศษเหลือเป็น 0 หรือไม่ด้วย code ดังนี้

```
m%n == 0
```

โดยที่ code ดังกล่าวจะคืนค่า True ถ้าหารลงตัว และคืนค่า False ถ้าหารไม่ลงตัว

แต่ในที่นี้เราจะเริ่มเขียนฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวกันด้วยตัวเองก่อนโดยอาศัยนิยามในการออกแบบ โดยสมมติว่าเราจะให้พารามิเตอร์แรกเป็นตัวตั้งและพารามิเตอร์ตัวที่สองเป็นตัวหาร และชื่อฟังก์ชันคือ `isDivisible` แต่ก่อนจะเริ่มลงมือเขียน code เราจะมาทบทวนนิยามของการหารลงตัวกันอีกรอบ

ทบทวนนิยามการหารลงตัว

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า m หารด้วย n ลงตัว ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = nk$

จากนิยาม จะเห็นว่าเป้าหมายหลักของฟังก์ชันหลังจากที่รับ m และ n เข้ามาแล้วคือต้องหาว่ามีจำนวนเต็ม k ที่เป็นผลหารดังกล่าวหรือไม่ โดยถ้าดูตามนิยามแล้วจะดูเหมือนว่าเราต้องตรวจสอบหาผลหาร k ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะพบ k ที่ทำให้ $m = nk$ ดังนี้

Not complete divisibility checking

```
k = 1
while m != n*k:
    k += 1
# after exiting from while-loop, k should be an integer such
↪   that m = nk,
# i.e. n is a factor of m
```

หว่า วิธีดังกล่าวจะทำงานไม่รู้จบถ้าค่าที่ได้รับเข้ามาเป็นคู่ที่หารกันไม่ลงตัว เพราะเหตุผลของการหารไม่ลงตัวคือ

$$m \nmid n \iff \text{ทุก } k \in \mathbb{Z} \text{ จะได้ว่า } m \neq nk$$

กล่าวคือ เราต้องตรวจสอบทุกจำนวนเต็ม k ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในการเขียนโปรแกรม อีกทั้ง ถึงแม้ว่าจะหารลงตัวก็ตาม ก็ยังคงมีคำถามว่าแล้วเราจะเริ่มหา k จากไหนและไปทางไหน เพราะถ้าหาผิดทางอาจจะทำงานไม่รู้จบได้เหมือนกัน ตัวอย่างเช่นเราอยากตรวจสอบว่า -10 หารด้วย 5 หรือไม่ ถ้าเราใช้ loop เริ่มจาก $k = 1$ และบวก 1 ไปเรื่อย ๆ ดังตัวอย่างข้างบน จะพบว่าโปรแกรมจะทำงานไม่รู้จบเพราะ k ตัวที่ต้องการคือ $k = -2$ ซึ่งไม่อยู่นี้ขอบเขตการหาที่กำหนดไว้

แต่ว่าเรามีคุณสมบัติหนึ่งที่เกี่ยวกับการหารลงตัวที่สามารถจำกัดขอบเขตการหาผลหาร k ได้ ซึ่งกล่าวว่า

คุณสมบัติเพื่อจำกัดขอบเขตของการหารลงตัว

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $m|n$ แล้ว $|n| \leq |m|$

ซึ่งในทำนองเดียวกัน เราสามารถมองผลหารเป็นตัวประกอบอีกตัวหนึ่งของ m ได้เช่นเดียวกัน จึงได้ว่า $|k| \leq |m|$ กล่าวคือถ้าจะมีผลหารของการหารลงตัวได้นั้น ผลหารดังกล่าวก็จะอยู่ได้แค่ในกลุ่ม $k \in \{-m, -m+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m-1, m\}$ เพราะฉะนั้น เราจึงจำกัดขอบเขตการหาผลหาร k ได้ไม่ว่าจะหารลงตัวหรือหารไม่ลงตัวก็ตาม กล่าวคือ

$$m|n \iff \text{มี } k \in \{-m, -m+1, \ldots, m-1, m\} \text{ ที่ทำให้ } m = nk$$

8.4.1 วิธีเบื้องต้น

จากนิยามที่ได้กล่าวมานั้น เราสามารถเขียนโปรแกรมเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวได้ด้วยการตรวจสอบว่าเจอผลหารหรือไม่ด้วยโปรแกรมดังนี้

Check divisibility

```
def isDivisible_ver1(m,n):
    qoutList = range(-m,m+1)
    for k in qoutList:
        if m = n*k:
            return True
    return False
```

ซึ่งโปรแกรมดังกล่าวจะรันลูปไปเรื่อย ๆ และเมื่อไหร่ก็ตามที่เจอผลหาร ฟังก์ชัน isDivisible จะคืนค่า True มาให้ แต่ถ้ารันจนครบลูปแล้วแต่ไม่เจอผลหาร จะคืนค่า False มาให้ เพราะไม่มีตัวประกอบ

ลองทำดู

ออกแบบให้จำนวนครั้งการค้นหาลดลงได้หรือไม่ ถ้าทำได้แล้วความซับซ้อนของจำนวนครั้งการค้นหาลดลงหรือไม่

8.4.2 พิจารณาแค่จำนวนบวกก็พอ

ถ้าลองสังเกตนิยามการหารลงตัวดีๆ จะพบว่าการเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบของตัวตั้งและตัวหารไม่ส่งผลต่อการคิด เพราะเราสามารถเปลี่ยนรูปแบบปัญหาให้พิจารณาแค่กรณีที่ทั้งตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวกอย่างเดียวได้ เนื่องจากถ้า $m = nk$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}(-m) = nk &\iff m = n(-k)\\ m = (-n)k &\iff m = n(-k)\\ (-m) = (-n)k &\iff m = nk\end{aligned}$$

กล่าวคือ เราทราบการเป็นบวกหรือลบของผลหาร k ได้โดยพิจารณาก่อนว่าตัวตั้งและตัวหารมีเครื่องเหมือนกันหรือแตกต่างกัน และใช้การตรวจสอบการหารลงตัวโดยอาศัยแค่ค่าบวกของ m และ n ที่เป็นตัวตั้งและตัวหาร

แต่เนื่องจากเราต้องการผลลัพธ์ในแง่การหารลงตัวว่าหารลงตัวหรือไม่ ไม่ได้ต้องการค่าผลหาร จึงไม่จำเป็นต้องแบ่งกรณีการคำนวณของโปรแกรมออกตามความเหมือนหรือความต่างของเครื่องหมายของตัวตั้งและตัวหาร กล่าวคือเราสามารถพิจารณาแค่ค่าบวกของทั้งคู่และตัดขอบเขตการหาผลลัพธ์การหารเป็นแค่ $k \in \{1, 2, \ldots, m-1, m\}$ ซึ่งจะได้โปรแกรมดังนี้

Check divisibility by positive

```
def isDivisible_ver2(m,n):
    if m < 0:
        m = -m
    if n < 0:
        n = -n
    qoutList = range(1,m+1)
    for k in qoutList:
        if m = n*k:
            return True
    return False
```

และโปรแกรมสำหรับการตรวจสอบการหารลงตัวที่จะพัฒนาต่อจากนี้จะขอสมมติว่าเรารับแค่จำนวนเต็มบวกมาตรวจสอบ ซึ่งถ้าจะทำให้รับจำนวนเต็มใด ๆ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับ `isDivisible_ver2`

8.4.3 เปลี่ยนจากปัญหาการคูณเป็นปัญหาการบวก

จากนิยามการคูณที่กล่าวว่า $k \cdot n := n + n + \cdots + n$ (k พจน์) จะพบว่าเราสามารถเปลี่ยนจากปัญหาการหาผลหาร k เป็นการลองลูปเพื่อเพิ่มพจน์การบวก n ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมากกว่าหรือเท่ากับ m โดยถ้าสามารถเท่ากับ m ได้จะได้ว่าหารลงตัว แต่ถ้าเกิน m เมื่อไหร่จะได้ว่าหารไม่ลงตัว

Check divisibility addition version

```
def isDivisible_ver3(m,n):
    product = 0
```

```
    while product < m:
        product += n
    if product == m:
        return True
    else:
        return False
```

เราสามารถทำได้ในทางกลับกันคือการลบตัวหารออกด้วย n ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้เศษการหาร (ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในการหาเศษการหารได้ด้วย)

Check divisibility subtraction version

```
def isDivisible_ver4(m,n):
    while m >= n:
        m -= n
    if m == 0:
        return True
    else:
        return False
```

8.4.4 เขียนแบบฟังก์ชันเวียนเกิด

จาก `isDivisible_ver4` จะเห็นแนวคิดของการทำปัญหาเดิมซ้ำกัน โดยถ้าเริ่มจากตัวตั้ง m และตัวหาร n เมื่อทำเสร็จไป 1 รอบของลูป จะได้ว่าตัวตั้งจะเปลี่ยนกลายเป็น $m - n$ โดยที่ตัวหารยังคง n เหมือนเดิม ซึ่งจะเห็นว่าแนวคิดดังกล่าวสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันเวียนเกิดเป็น

$$\texttt{isDivisible\_recur(m,n)} = \texttt{isDivisible\_recur(m - n,n)}$$

และตามรูปแบบการเขียนอัลกอริทึมเวียนเกิด สิ่งสำคัญคือต้องเขียนขั้นฐานของการคำนวณ ซึ่งคือขั้นที่เราสามารถกำหนดการคำนวณได้ง่าย ๆ โดยจะพบว่า ขั้นฐานของการคำนวณคือขั้นตอนหลังจากหลุดออกจาก while-loop ของ `isDivisible_ver4` กล่าวคือ เมื่อตัวตั้ง m ไม่ค่าน้อยกว่าตัวหาร n โดยที่ถ้าตัวตั้งมีค่าเท่ากับ 0 จะหมายความว่าเราสามารถลดค่าตัวตั้งมาเรื่อย ๆ จนหมดได้พอดี หรือก็คือมีเศษเหลือเป็น 0 นั่นคือการหารลงตัว ในทางกลับกัน ถ้าตัวตั้งมีค่ามากกว่า 0 จะหมายถึงการหารไม่ลงตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็น

เงื่อนไขขั้นฐานได้ดังนี้

$$\texttt{isDivisible\_recur(m,n)} = \begin{cases} \texttt{True} & \text{if } m = 0 \\ \texttt{False} & \text{if } 0 < m < n \end{cases}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังนี้

Check divisibility recursion

```
def isDivisible_recur(m,n):
    if m < n:
        if m == 0:
            return True
        else:
            return False
    else:
        return isDivisible_recur(m-n,n)
```

8.5 programming: ตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะ

8.5.1 วิธีเบื้องต้น

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้เขียนฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวไป ในหัวข้อนี้เราจะใช้ประโยชน์จากฟังก์ชันดังกล่าวนำมาตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะกันบ้าง โดยลักษณะของปัญหายังคงตรงไปตรงมาคือรับจำนวนนับ n เข้ามาแล้วคืนค่าว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ดังแผนภาพใน Figure ??

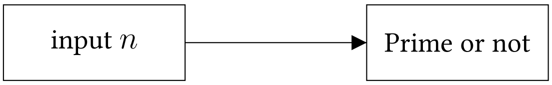

Figure 8.2: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ n และ output คือบอกว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

เริ่มจากทบทวนนิยามของจำนวนเฉพาะ ซึ่งคือ

ทบทวนนิยามจำนวนเฉพาะ

จำนวนนับ n จะเป็นจำนวนเฉพาะ ถ้ามีเพียงแค่ 1 และ n เท่านั้นที่หาร n ลงตัว

ซึ่งจากนิยามจะพบว่าเราสามารถตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะได้จากการตรวจสอบการหารลงตัวว่าในช่วงตั้งแต่ 1 ถึงจำนวนดังกล่าวมีเพียงแค่ 1 และตัวมันเองเท่านั้นที่หารจำนวนดังกล่าวลงตัว กล่าวคือถ้าเราหาตัวประกอบทั้งหมดของ n ได้ แล้วทำการตรวจสอบว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ก็จะสามารถตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะของ n ได้ทันทีตามแผนภาพใน Figure ?? ซึ่งถ้าเรามีลิสต์ของตัวประกอบของ n แล้วเราจะ

Figure 8.3: text

สามารถเขียนโค้ดเพื่อตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะได้ดังนี้

Check if it is prime

```
# assume we have a list `factorList` which is a list of all
↪  factors of n
factorList == [1,n]
```

ซึ่งโค้ดดังกล่าวจะให้ค่า True ออกมาถ้า n มีตัวประกอบเพียงแค่ 2 ตัวคือ 1 และ n กล่าวคือ n เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ในทางกลับกัน ถ้ามีตัวประกอบอื่นหลงอยู่ในลิสต์ดังกล่าวซึ่งก็คือ n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะนั้นจะได้ False ออกมาเป็นผลลัพธ์

Figure 8.4: text

ในตอนนี้เราจะเหลือเพียงแค่ปัญหาของการสร้างลิสต์ของตัวประกอบของ n ซึ่งทำได้โดยง่าย (ใน Python) โดยการรันลูปตั้งแต่ 1 ถึง n และตรวจสอบการเป็นตัวประกอบของ n เพื่อนำไปเก็บใน `factorList` ทีละตัว ซึ่งทำได้ดังนี้

Create factorList

```
factorList = []
for m in range(1,n+1):
    if isDivisible(n,m):
        factorList.append(m)
```

เมื่อนำโค้ดทั้งสองส่วนมารวมกันและเขียนเป็นฟังก์ชันของ n จะได้

Check prime

```
def isPrime(n):

    factorList = []
    for m in range(1,n+1):
        if isDivisible(n,m):
            factorList.append(m)

    prime = (factorList == [1,n])
    return prime
```

ทั้งนี้ ยังคงมีคำถามชวนคิดเกี่ยวกับโปรแกรมเช็คจำนวนเฉพาะที่เขียนขึ้นมาว่า

คำถาม

เพราะเหตุใดเราจึงเขียนลูปแค่บน 1 ถึง n ก็เพียงพอที่จะเช็คการเป็นจำนวนเฉพาะของ n ได้

จากโปรแกรมที่เขียนมา จะเห็นว่าเราใช้พลังของการมี memory กล่าวคือเราเก็บไว้ก่อนว่ามีใครบ้างเป็นตัวประกอบ แล้วสุดท้ายนำมาตรวจสอบอีกทีว่ามีแค่ 1 และตัวมันเองเท่านั้นที่เป็นตัวประกอบ ซึ่งเราทำการเก็บตัวประกอบไว้ในลิสต์ ซึ่งเป็นเรื่องที่โชคดีที่ลิสต์เป็น built-in data structure ของ Python จึงทำให้เราสามารถ implement วิธีนี้ได้โดยง่าย ทว่า ในบางภาษานั้นกลับไม่มีลิสต์ให้ใช้ และการตรวจสอบเรื่องการมีใครเป็นสมาชิกบ้างก็ไม่ใช่เรื่องง่ายกับ array ที่เป็นโครงสร้างข้อมูลพื้นฐานในหลาย ๆ ภาษา ดังนั้น จะแก้ปัญหาอย่างไรถ้าเราอยาก implement โจทย์นี้ในภาษาอื่น ๆ หรือแม้กระทั่งในวิชา Python เองแต่ยังเรียนไม่ถึงการใช้ลิสต์

8.5.2 วิธีที่ไม่ใช้ลิสต์ หรือการจำตัวประกอบทั้งหมดของ n

ก่อนอื่น เราจะต้องเปลี่ยนรูปแบบปัญหาให้เป็นปัญหาทางตรรกศาสตร์กันก่อน โดยเริ่มจากนิยามกัน

$$\begin{aligned} n > 1 \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ } &\iff \text{มีเพียงแค่ } 1 \text{ และ } n \text{ ที่เป็นตัวประกอบของ } n \\ &\iff \text{ถ้า } k \notin \{1, n\} \text{ แล้ว } k \text{ จะไม่เป็นตัวประกอบของ } n \\ &\iff \text{ทุก } k = 2, \ldots, n-1 \text{ จะได้ว่า } k \text{ ไม่เป็นตัวประกอบของ } n \end{aligned}$$

หรือในทำนองเดียวกัน เพียงแต่ใช้ความสมมูลเชิงนิเสธ จะได้ว่า

$$n > 1 \text{ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ } \iff \text{มี } k = 2, \ldots, n-1 \text{ ที่ } k \text{ เป็นตัวประกอบของ } n$$

กล่าวคือ ถ้าเราจะตรวจสอบว่า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เราสามารถทำได้ โดยลูปตั้งแต่ 2 ถึง $n-1$ และเมื่อใดก็ตามที่เจอตัวประกอบเพียงสักตัว เราก็จะสามารถหยุดลูปและบอกได้ทันทีว่า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ (มาจากการให้เหตุผลว่าประพจน์ $\exists x, P(x)$ เป็นจริง) ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Check prime version2

```
def isPrime_ver2(n):

    prime = True                    #set as default to be prime
```

```
    for k in range(2,n):
        if isDivisible(n,k):   #check if factor
            prime = False      #if k is a factor, set it to be
             ↪  not prime
            break              #stop for loop

    return prime
```

แบบฝึกหัดเพิ่ม

ลองเขียน `isPrime_ver3` โดยใช้ while-loop

8.5.3 ลดจำนวนครั้งการคำนวณได้มากกว่านี้อีก

จากโปรแกรมที่ได้ทำมาแล้วนั้น เราจะพบว่า `isPrime` มีความซับซ้อนเชิงคำนวณอยู่ที่ $O(n)$ และ `isPrime_ver2` มีความซับซ้อนเชิงการคำนวณไม่เกิน $O(n)$ ซึ่งกรณีแย่ที่สุดคือ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะต้องตรวจสอบทุกจำนวนตั้งแต่ 2 ถึง $n-1$ ว่าเป็นตัวประกอบหรือไม่

ทว่า เราสามารถอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะที่กล่าวว่า

การตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะโดยตรวจสอบไม่เกิน $\sqrt{n}$ ครั้ง

ให้ n เป็นจำนวนนับ ถ้า p ไม่เป็นตัวประกอบของ n สำหรับทุก ๆ จำนวนเฉพาะ $p \leq \sqrt{n}$ แล้ว n จะเป็นจำนวนเฉพาะ

ถึงแม้ทฤษฎีบทจะบอกว่าเพียงพอที่จะตรวจสอบแค่ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าไม่เกิน $\sqrt{n}$ แต่ว่าในการพิจารณากับแค่จำนวน n เพียงจำนวนเดียว เราจะยังคงไม่มีข้อมูลเก่าว่าจำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นวิธีที่ง่ายที่สุดคือตรวจสอบกับทุกจำนวนตั้งแต่ 2 ถึง $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ว่ามีใครบ้างที่เป็นตัวประกอบของ n ซึ่งทำให้เราสามารถแก้โค้ด `isPrime_ver2` ให้ตรวจสอบน้อยลงได้ดังนี้

Check prime version2.1

```
import math
def isPrime_ver2_1(n):
    prime = True                    #set as default to be prime
    upper = int(math.sqrt(n))
    for k in range(2,upper):
        if isDivisible(n,k):        #check if factor
            prime = False           #if k is a factor, set it to be
             ↪  not prime
            break                   #stop for loop
    return prime
```

8.6 programming: แยกตัวประกอบในรูปผลคูณจำนวนเฉพาะ

หนึ่งในทฤษฎีบทสำคัญของการแยกตัวประกอบของจำนวนเต็มคือ Fundamental Theorem of Arithmetic ซึ่งกล่าวว่า

Fundamental Theorem of Arithmetic

ทุก ๆ จำนวนเต็ม n จะมีจำนวนเฉพาะ $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ และจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เพียงชุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

ซึ่งเราได้ศึกษาและพิสูจน์ไปแล้วในหัวข้อ **??**

ในหัวข้อนี้ เราจะเขียนโปรแกรมเพื่อหารูปแบบนี้กัน โดยสมมติว่าเราอยากให้โปรแกรมคืนค่าออกมาเป็น dictionary ที่มี keys ระบุจำนวนเฉพาะ และ values ระบุเลขชี้กำลัง ตัวอย่างเช่น $1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$ จะให้ผลลัพธ์ออกมาเป็น `{2:3, 5:2, 7:1}`

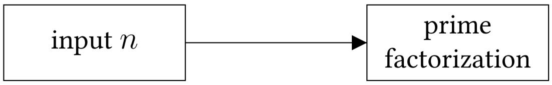

Figure 8.5: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ n และ output คือการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่คืนค่าออกมาเป็น dictionary

8.6.1 วิธีวนซ้ำตามจำนวนเฉพาะ

ขั้นตอนทำความเข้าใจปัญหา

จากรูปแบบปัญหา จะเห็นได้โดยง่ายว่าวิธีที่พื้นฐานที่สุดที่ทำได้คือการวนซ้ำไปตามตัวประกอบจำนวนเฉพาะเพื่อหาว่าจะสามารถแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะนั้นออกมาได้กี่รอบ กล่าวคือเราสามารถแยกย่อยปัญหาดังกล่าวออกมาเป็นปัญหาย่อยของทีละจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบ โดยเป็นโจทย์ย่อยว่า

กำหนดจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p
เขียนโปรแกรมเพื่อหาว่าสามารถแยกตัวประกอบ p นั้นออกมาได้กี่ตัว
พูดอีกนัยหนึ่งคือ จงหาจำนวนนับ k ที่ทำให้ $n = p^k \cdot A$ โดยที่ $p \nmid A$

และเขียนแผนภาพการแก้ปัญหาได้แบบแแผนภาพ 8.6

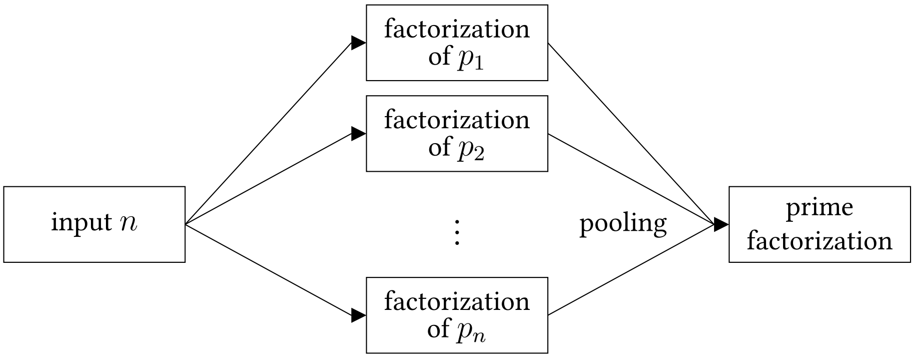

Figure 8.6: ...

ทว่า จะพบว่ายังเหลือปัญหาย่อยที่ว่ามีจำนวนเฉพาะใดบ้างที่เป็นตัวประกอบของ n เพื่อที่จะระบุขอบเขตการแก้ปัญหาย่อย $p_1, \ldots, p_n$ ดังนั้นก่อนที่จะแก้ปัญหาย่อยการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่กำหนดตัวประกอบจำนวนเฉพาะมาแล้วนั้น เราจะต้องแก้ปัญหาการหาตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดของ n ก่อน จึงได้แผนภาพการแก้ปัญหาดังแผนภาพ 8.7

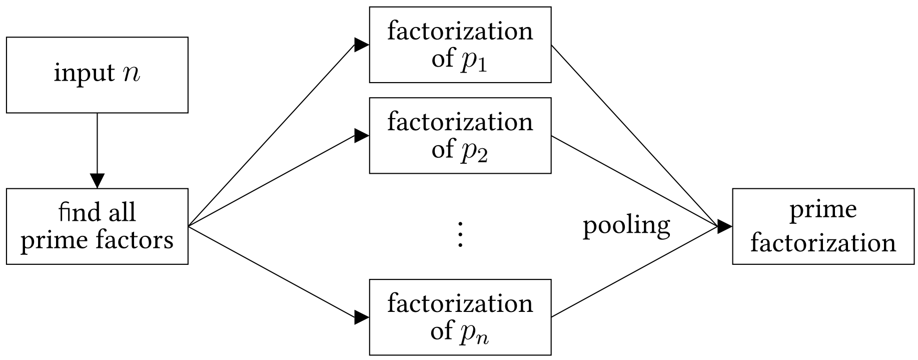

Figure 8.7: ...

ซึ่งปัญหาย่อยของการแยกตัวประกอบของแต่ละตัวประกอบเฉพาะนั้น เราสามารถใช้ for-loop เพื่อลูปการแก้ปัญหาตามตัวประกอบเฉพาะทั้งหมดที่หามาได้และเก็บผลลัพธ์มาสะสมไว้ ซึ่งจะได้ดังแผนภาพ 8.8

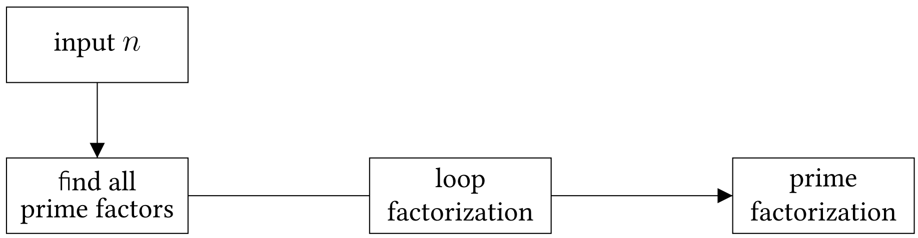

Figure 8.8: ...

ทั้งนี้ โจทย์ปัญหาของการหาตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดของ n จะทิ้งไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดในแบบฝึกหัด 6 แต่เราจะมาแก้ปัญหาเรื่องจำนวนครั้งการเป็นตัวประกอบของตัวประกอบเฉพาะที่กำหนดมาให้กัน

แก้ปัญหาย่อยจำนวนครั้งการหารลงตัว

ก่อนลงรายละเอียด จะขอทบทวนปัญหาอีกสักครั้ง

กำหนดจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p
เขียนโปรแกรมเพื่อหาว่าสามารถแยกตัวประกอบ p นั้นออกมาได้กี่ตัว
พูดอีกนัยหนึ่งคือ จงหาจำนวนนับ k ที่ทำให้ $n = p^k \cdot A$ โดยที่ $p \nmid A$

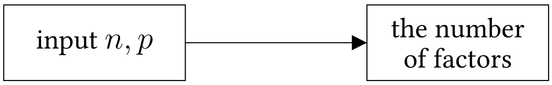

Figure 8.9: ภาพใหญ่ของปัญหาย่อยซึ่ง input คือจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p และ output คือจำนวนครั้งการหาร n ลงตัวของ p

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างง่าย เราสามารถทำได้ด้วยการวนลูปหารซ้ำไปเรื่อย ๆ ด้วยเงื่อนไขว่า "ตราบใดที่ยังหารลงตัวอยู่ (`n%p == 0`) ให้หารต่อ" และทุกครั้งการหารเราจะมีตัวแปรเพื่อเก็บจำนวนครั้งการหารไว้ (`counter += 1`) และอัพเดตตัวตั้งการหารเป็นผลหารล่าสุด `n = n//p` ซึ่งสามารถเขียนเป็นโค้ดได้ดังนี้

factorization of given prime p

```
def countFactor(n,p):
    count = 0
    while n%p == 0:
        count += 1
        n = n//p
    return count
```

รวบรวมวิธีแก้ปัญหาย่อยเพื่อแก้ปัญหาหลัก

ตอนนี้เรามีฟังก์ชัน `countFactor` เพื่อช่วยในการนับจำนวนตัวประกอบเฉพาะ p ของ n และ(สมมติ)มีฟังก์ชัน `findAllPrimeFactor` เพื่อช่วยในการหาตัวประกอบเฉพาะทั้งหมดของ n หรือพูดอีกนัยหนึ่งคือ เราสามารถหาได้แล้วว่าเมื่อทำการแยกตัวประกอบเฉพาะของ n จะมีจำนวนเฉพาะใดคูณกันอยู่บ้าง และแต่ละจำนวนเฉพาะดังกล่าวมีเลขชี้กำลังเป็นอะไร ตอนนี้เหลือเพียงแค่นำ 2 ฟังก์ชันดังกล่าวมาทำงานร่วมกันตามแผนที่วางไว้ในแผนภาพ 8.8 ซึ่งเราจะสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Prime Factorization

```
def primeFactorize(n):
    primeList = findAllPrimeFactor(n)
    resultDict = {}
    for p in primeList:
        resultDict[p] = countFactor(n,p)
```

```
    return resultDict
```

8.6.2 วิธีเวียนเกิด

ถ้าลองสังเกตวิธีคำนวณของฟังก์ชัน countFactor ดี ๆ จะพบว่ามีแนวคิดของการเรียกฟังก์ชันแบบเวียนเกิดที่สำคัญอยู่อย่างหนึ่ง ซึ่งคือการที่เราไม่ได้พิจารณาตัวตั้งของการหารว่ามีค่า n ที่รับมาตลอดเวลา แต่ n ในการพิจารณารอบถัดไปก็เกิดจากการที่เราตัดทอนตัวประกอบที่หาพบมาแล้วหนึ่งตัว (n/p) ซึ่งถึงแม้ว่าในฟังก์ชันดังกล่าวจะทำอยู่กับแค่ p ตัวเดียว แต่เราก็สามารถขยายแนวคิดนี้มาสู่กรณีใด ๆ ที่ไม่ได้กำหนดตัวประกอบเฉพาะตายตัวไว้ได้เช่นกัน

จากประเด็นดังกล่าว จึงนำมาสู่แนวคิดการออกแบบในรูปแบบเวียนเกิดว่า เราให้ฟังก์ชันนั้นหยิบตัวประกอบเฉพาะที่เล็กที่สุดออกมาก่อนหนึ่งตัว (p_1) แล้วปล่อยให้ฟังก์ชันเดิมคำนวณกับกรณี n/p_1 จนกว่าจะได้ว่าหารแล้วเหลือแค่ 1 ซึ่งมาจากแนวคิด

$$n = \underbrace{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}}_{\texttt{algor(n)}} = p_1 \times \big(\underbrace{p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}}_{\texttt{algor(n/p\_1)}}\big) = p_1 \times (n/p_1)$$

ทว่า สิ่งที่เราต้องการทำคือการเก็บจำนวนครั้งการหารลงตัวไว้ใน dictionary ดังนั้นเราจึงต้องให้อัลกอริทึมที่เรากำลังจะสร้างคืนค่าเป็น dictionary ของจำนวนครั้งการหารลงตัวของ n/p_1 และทำการอัพเดต p_1 เพิ่มเข้าไปอีก 1 ครั้ง ซึ่งสามารถทำได้ง่ายผ่านคำสั่ง `dict[key] = dict.get(key,0) + 1` (ถ้าไม่มี key นั้นให้คืนค่า 0 แล้วเพิ่มไป 1 จึงได้ 1 แต่ถ้ามี key นั้นอยู่แล้วให้คืนค่าเดิมออกมาก่อนแล้วบวกเพิ่มไปอีก 1 แล้วบันทึกกับลงไปใน key เดิม)

นอกจากนั้น ยังพบว่าเครื่องมืออีกชิ้นที่สำคัญของแนวคิดนี้คือการหาตัวประกอบเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดก่อน ซึ่งสามารถปรับปรุงจากฟังก์ชันที่เขียนเป็นแบบฝึกหัดข้อ 6 โดยให้คำนวณจากน้อยไปมาก และเมื่อเจอตัวประกอบเฉพาะตัวแรกก็ให้คืนค่าทันที โดยในที่นี้ขอสมมติชื่อฟังก์ชันเป็น minPrimeFactor

สุดท้าย จะสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Recursive Prime Factorization

```
def primeFactorize_recur(n):
    if n == 1:
        return {}
    else:
```

```
    min_p = minPrimeFactor(n)
    result_dic_recur = primeFactorize_recur(n//min_p)
    result_dic_recur[min_p] = result_dic_recur.get(min_p,0)
    ↪  + 1
    return result_dic_recur
```

8.7 programming: ขั้นตอนวิธีการหารหาเศษและผลหาร

8.8 Programming Exercise

1. จงวิเคราะห์ความซับซ้อนของอัลกอริทึมต่าง ๆ ในการตรวจสอบการหารลงตัว ทั้งรูปแบบเชิงทฤษฎีและเชิงการทดลองเพื่อเปรียบเทียบ โดยที่สมมติว่าทุก operation (บวก ลบ คูณ การเปรียบเทียบ) มีต้นทุนเท่ากับ 1 หน่วย
2. โปรแกรม `isDivisible_recur` ที่ให้เป็นตัวอย่างในหัวข้อ 8.4.4 ยังคงอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่าใส่ได้แค่จำนวนเต็มบวก จงพิจารณาว่าเราสามารถแก้ไขให้รับกับจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยวิธีเดียวกับ `isDivisible_ver2` ได้หรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าไม่ได้จงหาวิธีแก้ไขวิธีอื่น
3. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลหารและเศษเหลือจากขั้นตอนวิธีการหาร
4. จงเขียนโปรแกรมตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะโดยใช้รูปแบบเวียนเกิด
5. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าลิสต์ของทุกจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 1 ถึง n โดยที่แย่ที่สุดไม่เกิน $O(n^{\frac{3}{2}})$
   (เราสามารถทำได้ง่ายที่สุดคือ $O(n^2)$ ด้วยการตรวจสอบทีละจำนวนว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ด้วยวิธี ver2 และ print เมื่อเป็นจำนวนเฉพาะ)
6. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าเป็นลิสต์ของจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบของ n
7. จงเขียนฟังก์ชันนับจำนวนครั้งการหาร n ด้วย p ลงตัว (ฟังก์ชัน `countFactor`) แบบเวียนเกิด
8. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าจำนวนของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n
9. จงเขียนฟังก์ชันที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าออกมาเป็น dictionary ของการแยกตัวประกอบเฉพาะของ $n!$ (caution: จะพบว่าเราสามารถแก้ปัญหาโดยอาศัยฟังก์ชัน `primeFactorize` ในหัวข้อ 8.6 ได้โดยง่าย แต่ว่าจะมีปัญหาเมื่อ n มีค่าใหญ่ ๆ จนทำให้การเก็บ $n!$ ใช้หน่วยความจำเกิน)
10. อาศัยฟังก์ชันที่เขียนขึ้นมาในแบบฝึกหัดข้อ 9 เพื่อเขียนฟังก์ชันที่รับจำนวนนับ n แล้วคืนค่าเป็นจำนวนของเลข 0 ที่ลงท้ายของผลลัพธ์ของ $n!$

Chapter 9

Introduction of Number System: Natural Number and Integer System

Chapter 10

Combinations

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคต่าง ๆ เกี่ยวกับการนับจำนวนเหตุการณ์ โดยเริ่มจากเทคนิคเบื้องต้นที่สุดซึ่งคือหลักการบวกและหลักการคูณที่เป็นพื้นฐานของสูตรการนับอื่น ๆ ที่จะกล่าวถึงต่อไปในบทนี้ กล่าวคือถึงแม้เราจะไม่รู้สูตรในการคำนวณการนับแบบยาก ๆ แต่ถ้าเราใช้ทักษะด้านการวางแผนช่วยในการนับ ทุกปัญหาจะสามารถถูกแก้ปัญหาได้โดยใช้เพียงแค่หลักการบวกและหลักการคูณได้ หลังจากทำความคุ้นเคยกับการวางแผนการนับเหตุการณ์เบื้องต้นด้วยหลักการบวกและหลักการคูณแล้ว จะเริ่มกล่าวถึงสูตรของรูปแบบการนับต่าง ๆ ที่เฉพาะเจาะจงมากขึ้น ได้แก่ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดกลุ่ม ทั้งในรูปแบบไม่มีของซ้ำกันและมีของซ้ำกันหรือเลือกซ้ำได้

10.1 หลักการบวกและหลักการคูณ

อย่างที่ได้กล่าวไปตอนต้นว่าทุกสูตรที่จะถูกกล่าวถึงในบทนี้นั้นมีแนวคิดตั้งต้นมาจากหลักการบวกและหลักการคูณทั้งสิ้น เพียงแต่ต้องอาศัยทักษะในการวางแผนการนับให้เป็นขั้นเป็นตอน ดังนั้นจุดประสงค์ของหัวข้อนี้คือการทำความคุ้นเคยกับการวางแผนการนับผ่านโจทย์ที่อยู่ในระดับง่ายถึงปานกลาง โดยที่เครื่องมือการนับในเวลานี้มีเพียงแค่หลักการบวกและหลักการคูณ

10.1.1 หลักการบวก

หลักการบวก

ในการทำงานอย่างหนึ่งมีทางเลือกการทำอยู่ 2 ทางเลือก โดยที่ทางเลือกแรกมีวิธีทำได้ p วิธีแตกต่างกัน และทางเลือกที่สองมีวิธีทำได้ q วิธีแตกต่างกัน โดยที่ทางเลือกทั้งสองไม่มีวิธีการทำร่วมกัน และเลือกทำได้แค่ทางเลือกใดทางเลือกหนึ่งเท่านั้น ถ้าต้องการเลือกวิธีการทำงานชิ้นนี้จะสามารถเลือกทำได้ $p+q$ วิธีที่แตกต่างกัน

สิ่งแรกที่ต้องนึกถึงเมื่อจะเลือกใช้หลักการบวกคือกระบวนการนับของเราเป็นการแยกกรณี กล่าวคือเป็นทางเลือกให้ทำเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่ไม่ว่าจะเลือกทำทางไหนก็ถือว่าจบกระบวนการทำงานชิ้นนั้น และอย่างที่สองที่ต้องระวังคือทางเลือกที่แยกออกไปต้องไม่มีวิธีการที่ซ้ำกัน กล่าวคือไม่มีการนับซ้ำเกิดขึ้นในกระบวนการนับ

ในส่วนของโจทย์ด้านล่างนั้น ผู้อ่านคงทราบดีว่าเราต้องใช้หลักการบวกในการนับเพราะเป็นโจทย์ในหัวข้อหลักการบวก แต่สิ่งที่ผมอยากให้ผู้อ่านนึกหลังจากอ่านโจทย์เสร็จคืออะไรเป็นคีย์เวิร์ดสำคัญที่บอกเราว่าขั้นตอนนี้ต้องใช้หลักการบวก

Example 10.1.1. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ 33 คน และมีนิสิตวิชาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์ 40 คน ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาหนึ่งคนเพื่อเป็นคณะกรรมการของสโมสรนิสิต จะมีวิธีเลือกนิสิตดังกล่าวได้แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

Example 10.1.2. ให้เซต $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ถ้าต้องการเลือกตัวอักษรหนึ่งตัวจากเซต A หรือเซต B จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

Solution. ...

นอกจากที่เรากล่าวถึงหลักการบวกในแง่เปรียบเทียบกับการเลือกวิธีการทำงานในรูปแบบภาษามนุษย์แล้วนั้น จากตัวอย่างที่ 10.1.2 เราจะพบว่าเราสามารถนิยามหลักการบวกได้โดยใช้เซตเข้ามาช่วยในการพูดให้เป็นภาษาคณิตศาสตร์มากขึ้นได้ดังนี้

หลักการบวกแบบภาษาเซต

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตที่มีสมาชิกแตกต่างกัน กล่าวคือ $A \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

และนอกจากที่เรานิยามหลักการบวกโดยใช้แค่ 2 ทางเลือก เรายังสามารถขยายแนวคิดออกไปให้มีมากกว่า 2 ทางเลือกได้ในทำนองเดียวกันคือ

หลักการบวกกรณีทั่วไป

ถ้ามีทางเลือก m ทางเลือก ซึ่งไม่มีทางเลือกใดที่มีวิธีการซ้ำกับทางเลือกอื่น ๆ สมมติว่าทางเลือกที่หนึ่งมีวิธีทำได้ r_1 วิธี ทางเลือกที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธี $\ldots$ และทางเลือกที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธี ดังนั้นจะมีวิธีเลือกทำงานชิ้นนี้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งได้แตกต่างกัน $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ วิธี
หรือกล่าวแบบภาษาเซตคือ ถ้า $A_1, \ldots, A_m$ เป็นเซตที่ไม่มีสองเซตใด ๆ ที่มีสมาชิกร่วมกัน กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + \cdots + |A_m|$$

Example 10.1.3. จงหา $|\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon x^2 + y^2 \leq 4\}|$

Solution. ...

10.1.2 หลักการคูณ

หลักการคูณ

กระบวนการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยขั้นตอนย่อยๆ สองขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกมีวิธีทำได้แตกต่างกัน p วิธี และไม่ว่าจะเลือกวิธีใดก็ตามในขั้นตอนแรกจะสามารถทำขั้นตอนที่สองได้แตกต่างกัน q วิธี และขั้นตอนทั้งสองนี้ไม่สามารถทำงานร่วมกันได้ ดังนั้นจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้แตกต่างกัน pq วิธี

ประเด็นสำคัญของหลักการคูณคือการที่งานชิ้นนั้นมีความเป็นขั้นตอนทำอย่างต่อเนื่องกัน และต้องทำทุกขั้นตอนถึงจะเสร็จงานชิ้นนั้น ถ้าในการวางแผนการนับมีการแบ่งการนับออกเป็นขั้นและมั่นใจว่าเมื่อทำจบทุกขั้นแล้วจะได้ผลลัพธ์ของการจัดเรียงออกมาตามที่เราต้องการก็เป็นการยืนยันได้ในระดับหนึ่งว่าเราจะต้องใช้หลักการคูณเข้ามานับ นอกจากนั้น ข้อระวังของกฏการคูณที่ต้องพึงระวังไว้เสมอคือจำนวนวิธีการเลือกทำในขั้นตอนถัดไปจะต้องเท่ากันทั้งหมดไม่ว่าจะเลือกทำวิธีการใดในขั้นตอนปัจจุบันก็ตาม กล่าวเทียบกับนิยามด้านบนคือ ไม่ว่าเราจะเลือกวิธีใดใน p วิธีของขั้นตอนที่หนึ่ง เราจะต้องสามารถทำขั้นตอนที่สองได้ q วิธีทั้งหมด

คำถาม

จริง ๆ แล้วเราสามารถมองหลักการคูณจากมุมมองของหลักการบวกได้ ซึ่งจะพบเหตุผลว่าทำไมเงื่อนไขของการที่จำนวนวิธีที่เลือกทำได้ในขั้นตอนถัดไปต้องเท่ากันไม่ว่าเลือกทำวิธีใดมาเป็นเงื่อนไขที่สำคัญ จงพิจารณาหลักการคูณโดยใช้การอธิบายในรูปแบบของหลักการบวก

Example 10.1.4. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ 33 คน และมีนิสิตวิชาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์ 40 คน ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาสองคนจากวิชาเอกละหนึ่งคนเพื่อเป็นคณะกรรมการของสโมสรนักศึกษา จะมีวิธีเลือกนักศึกษาได้แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

Example 10.1.5. ให้เซต $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ถ้าต้องการเลือกตัวอักษร 2 ตัวจากเซต A และเซต B เซตละหนึ่งตัว จะมีวิธีเลือกที่แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

ในทำนองเดียวกัน หลักการคูณก็สามารถเขียนได้ในรูปแบบของเซตดังนี้

หลักการคูณแบบภาษาเซต

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต และ $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$ แล้วจะได้ว่า

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Example 10.1.6. จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันมีทั้งหมดกี่จำนวน

Solution. ...

หลักการคูณกรณีทั่วไป

ถ้างานชิ้นหนึ่งประกอบด้วย m ขั้นตอน สมมติว่าขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีทำได้ r_1 วิธี ขั้นตอนที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธีไม่ว่าจะเลือกวิธีการใดในขั้นตอนที่หนึ่งก็ตาม $\ldots$ และขั้นตอนที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธีไม่ว่าจะเลือกวิธีการใดในขั้นตอนก่อนหน้าก็ตาม ดังนั้นจะมีวิธีเลือกทำงานชิ้นนี้ได้แตกต่างกัน $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_m$ วิธี

หรือกล่าวแบบภาษาเซตคือ ถ้า $A_1, \ldots, A_m$ เป็นเซตใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$|A_1 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \times \cdots \times |A_m|$$

Example 10.1.7. จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันมีทั้งหมดกี่จำนวน

Solution. ...

Example 10.1.8. จงแสดงว่าเซตที่มีสมาชิก n ตัวมีเซตย่อย 2^n เซต

Solution. ...

Example 10.1.9. มีคู่สามีภรรยา 15 คู่ในงานปาร์ตีแห่งหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีการเลือกผู้หญิงหนึ่งคนและผู้ชายอีกหนึ่งคนโดยที่ (1) ต้องเป็นคู่สามีภรรยากัน (2) ต้องไม่เป็นคู่สามีภรรยากัน

Solution. ...

Example 10.1.10. พาสเวิร์ดของระบบความปลอดภัยแห่งหนึ่งเป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษยาว 3 หรือ 4 ตำแหน่ง จงหา (1) จำนวนของพาสเวิร์ดที่เป็นไปได้ทั้งหมด (2) จำนวนของพาสเวิร์ดที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ใช้ตัวอักษรไม่ซ้ำกัน

Solution. ...

Example 10.1.11. จงหาจำนวนของตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $441,000(= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2)$

Solution. ...

Example 10.1.12. จงหาจำนวนวิธีในการเขียน $441,000$ ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มบวก 2 จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน (เช่น $1 \times 441,000$ หรือ 441×1000)

Solution. ...

Example 10.1.13. กำหนดให้ $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ และ $S = \{(a, b, c) \colon a, b, c \in X, a < b$ และ $a < c\}$ จงหาจำนวนสมาชิกทั้งหมดของ S

Solution. ...

10.2 การเรียงสับเปลี่ยน

10.2.1 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของไม่ซ้ำ

กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เป็นเซตของ n สิ่งของที่แตกต่างกัน และให้ $0 \leq r \leq n$ แล้ว **การเรียงสับเปลี่ยน r ชิ้น**ของเซต A (r-permutation) คือรูปแบบในการจัดเรียงลำดับเป็นแถวตรงของสมาชิก r ตัวใดๆ จากเซต A และเขียนแทนจำนวนของรูปแบบดังกล่าวที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วย $P(n, r)$

Example 10.2.1. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงเขียนรูปแบบการเรียงสับเปลี่ยนของ 3 ชิ้นจากเซต A ทั้งหมด

Solution. ...

ในกรณีที่ n มีค่าน้อย ๆ ก็เป็นการง่ายที่จะไล่ทุกรูปแบบเพื่อนับ แต่ในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ คงไม่เป็นเรื่องง่ายที่จะเขียนไล่ให้ครบแน่ ๆ จึงต้องมาพิจารณากันว่าแล้วเราจะคำนวณหาค่า $P(n, r)$ กันอย่างไร

อย่างที่ได้กล่าวไปหลายรอบแล้วว่าเบื้องหลังของสูตรการนับต่าง ๆ นั้นมีพื้นฐานมาจากหลักการบวกและหลักการคูณทั้งสิ้น เพียงแค่ต้องวางแผนขั้นตอนการนับให้ถูกต้อง ดังนั้น สิ่งแรกที่ต้องทำคือวางแผนว่าเราจะวางขั้นตอนของการเรียงสับเปลี่ยน r ชิ้นจากของ n ชิ้นอย่างไร

แนวคิดหนึ่งที่น่าจะเป็นแนวคิดที่ผู้อ่านทุกคนคิดถึงเป็นอย่างแรกคือ **เลือกของจากกองตัวเลือกที่มีมาใส่ทีละตำแหน่งไล่ไปตั้งแต่ตำแหน่งแรกจนถึงตำแหน่งสุดท้าย**

จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน

$P(n, r)$ คือ จำนวน สมาชิก ของ เซต $\{(x_1, x_2, \ldots, x_r) | x_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ และ $x_i \neq x_j$ สำหรับทุกๆ $i \neq j\}$ และจะได้ว่า

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Note

$$P(n,0) = 1 \text{ และ } P(n,1) = n \text{ และ } P(n,n) = n!$$

คำเตือน

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นเพียงแค่เครื่องมือหนึ่งในการนับ ไม่ใช่รูปแบบของโจทย์ อาจมีการใช้พร้อมกับหลักการบวก และหลักการคูณ และการเรียงสับเปลี่ยนอาจเป็นเพียงการนับในขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของหลักการคูณก็ได้

Example 10.2.2. จงหาจำนวนคำซึ่งมีความยาว 4 ตัวอักษร โดยที่ตัวอักษรทั้ง 4 ตัวมาจากเซต $\{a, b, c, d, e\}$

Solution. ...

Example 10.2.3. จัดคน 6 คนเข้านั่งเรียงในแนวเส้นตรงได้กี่วิธี

Solution. ...

Example 10.2.4. จัดสามีภรรยา 3 คู่เข้านั่งเรียงแถวได้กี่วิธีถ้า (1) หัวแถวและท้ายแถวต้องเป็นผู้ชาย (2) ภรรยาต้องนั่งติดกับสามี

Solution. ...

Example 10.2.5. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มซึ่งมีความยาว 7 หลัก แต่ละหลักแตกต่างกันและไม่เป็น 0 โดยที่เลข 5 และเลข 6 ต้องไม่ปรากฏในตำแหน่งติดกัน

Solution. ...

Example 10.2.6. จงอธิบายเหตุผลเชิงการจัดเรียงว่า

$$P(n, n) = P(n, k) \times P(n-k, n-k)$$

Solution. ...

Note

เรียกการพิสูจน์แบบตัวอย่างที่ 10.2.6 ว่า **combinatorial proof** หรือเรียกว่า **เทคนิค double counting**

Example 10.2.7. จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันทั้งหมดมีกี่จำนวน

Solution. ...

Example 10.2.8. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนนับที่สร้างมาจากเลขโดด $\{1, 3, 5, 7\}$ ที่เลขในแต่ละหลักแตกต่างกันทั้งหมด จงหา

1. $|S|$
2. $\sum_{n \in S} n$

Solution. ...

10.2.2 การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

- มีข้อแตกต่างจากการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นอย่างไร (มองว่าสองรูปแบบการจัดเรียงแตกต่างกันอย่างไร)

- ออกแบบกระบวนการนับอย่างไร

Example 10.2.9. จงเขียนรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้น 4 สิ่งจากเซต $A = \{a, b, c, d\}$ ซึ่งมี $4! = 24$ แบบ และจงเขียนแยกว่าแบบใดบ้างที่เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมจะได้รูปแบบเดียวกัน (และสังเกตรูปแบบเพื่อนับ)

Solution. ...

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม คือ รูปแบบการจัดเรียงที่นำรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้นมาล้อมเป็นวงกลม ซึ่งจะได้ว่าสองรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้นที่ต่างกันที่เมื่อนำมาล้อมเป็นวงกลมแล้วจะมองว่าเป็นรูปแบบเดียวกันเกิดจาก

และจะได้ว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่งทั้งหมดเท่ากับ

Example 10.2.10. นำเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนมานั่งล้อมโต๊ะกลม จะนั่งได้กี่วิธีถ้า

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. เด็กชาย B_1 และเด็กหญิง G_1 ไม่นั่งติดกัน
3. ไม่มีเด็กผู้หญิงสองคนใด ๆ นั่งติดกัน

Solution. ...

Example 10.2.11. จงหาจำนวนวิธีการนั่งที่แตกต่างกันของคู่สามีภรรยา n คู่รอบโต๊ะวงกลม โดยที่

1. ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกัน
2. คู่สามีภรรยาต้องนั่งติดกัน

Solution. ...

Example 10.2.12. จากตัวอย่างที่ 10.3.1 ที่เราได้เขียนรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้น 3 สิ่งจากเซต $A = \{a, b, c, d\}$ ซึ่งมี $P(4, 3) = 24$ แบบ จงเขียนแยกว่าแบบใดบ้างที่เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมจะได้รูปแบบเดียวกัน (และสังเกตรูปแบบเพื่อนับ)

Solution. ...

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมแบบทั่วไป

ถ้ามีของ n สิ่งแตกต่างกัน จะนำมาจัดเรียงเป็นวงกลม r สิ่งได้แตกต่างกัน $Q(n, r)$ วิธี โดยที่

$$Q(n, r) = \frac{P(n, r)}{r}$$

10.2.3 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของซ้ำ

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของซ้ำ

ถ้ามีของ n สิ่ง ซึ่งแบ่งออกเป็น k ประเภท โดยของในประเภทเดียวกันจะมองเป็นสิ่งเดียวกัน โดยที่มีของประเภทที่หนึ่งอยู่ n_1 ชิ้น ของประเภทที่สองมีอยู่ n_2 ชิ้น ... ของประเภทที่ k มีอยู่ n_k ชิ้น โดยที่ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ แล้วจะได้ว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่งนี้เท่ากับ

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) =$$

Example 10.2.13. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงคำว่า MISSISSIPPI ที่แตกต่างกันทั้งหมด

Solution. ...

10.3 การจัดกลุ่ม

กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เป็นเซตของ n สิ่งของที่แตกต่างกัน และให้ $0 \leq r \leq n$ แล้ว **การจัดกลุ่ม r ชิ้น**ของเซต A (r-combination) คือรูปแบบในการจัดสมาชิก r ตัวใดๆ จากเซต A เข้ากลุ่มเดียวกัน โดยที่ในกลุ่มเราไม่สนใจลำดับของสมาชิก แต่สนใจเพียงแค่มีใครอยู่บ้าง และเขียนแทนจำนวนของรูปแบบดังกล่าวที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วย $C(n, r)$ หรือ $\binom{n}{r}$

Example 10.3.1. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงเขียนรูปแบบการเรียงจัดกลุ่มของ 3 ชิ้นจากเซต A ทั้งหมด

Solution. ...

จำนวนวิธีในการจัดกลุ่ม

$C(n,r)$ คือจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของเซตที่มีสมาชิก n ตัว กล่าวคือ

$$C(n,r) = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} | x_i \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ และ } x_i \neq x_j \text{ สำหรับทุกๆ } i \neq j\}$$

และจะได้ว่า

$$C(n,r) =$$

Example 10.3.2. จงหาจำนวนทั้งหมดของบิตสตริงโดยมีความยาวเท่ากับ 9 ซึ่งมีเลขโดด 1 อยู่สี่ตำแหน่ง

Solution. ...

Example 10.3.3. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงคำว่า MISSISSIPPI ที่แตกต่างกันทั้งหมด (โจทย์เดิม แต่ใช้เทคนิคการจัดกลุ่มมาช่วยนับ)

Solution. ...

Example 10.3.4. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดแบ่งนักเรียน 7 คน ออกเป็นสามกลุ่ม โดยให้มีกลุ่มละสามคน 1 กลุ่ม และกลุ่มละสองคน 2 กลุ่ม

Solution. ...

Example 10.3.5. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการที่สุขใจเชิญเพื่อนเพียง 6 คนจากเพื่อนสนิททั้งหมด 10 คนมารับประทานอาหารเย็นด้วยกัน ซึ่งใน 10 คนนี้มี 2 คนเป็นพี่น้องกัน ถ้าจะเชิญมาต้องเชิญทั้ง พี่และน้องมาด้วย

Solution. ...

Example 10.3.6. จงใช้เหตุผลเชิงการนับเพื่อพิสูจน์ว่า

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Solution. ...

Example 10.3.7. จงใช้เหตุผลเชิงการนับเพื่อพิสูจน์ว่า

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Solution. ...

10.4 สัมประสิทธิ์ทวินาม

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้น เราได้นิยามจำนวน $\binom{n}{r}$ หรือ $C(n, r)$ ไปแล้วด้วยปัญหาของการสร้างเซตย่อยขนาด r สมาชิกจากเซตที่มี n สมาชิก แต่ทั้งนี้ เรายังสามารถนิยามเพิ่มเติมในกรณีของ $r < 0$ หรือกรณี $r > n$ ได้เป็น

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{ถ้า } 0 \leq r \leq n \\ 0 & \text{ถ้า } r > n \text{ หรือ } r < 0 \end{cases}$$

และเรายังสามารถพิสูจน์เอกลักษณ์ต่างๆ ของค่าเชิงการจัดกลุ่มได้โดยใช้หลักการนับเข้ามาช่วย

แต่ว่าเรายังสามารถนิยามค่าของสัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ ได้ในอีกรูปแบบหนึ่งผ่านการพิจารณารูปแบบการกระจายของพหหุนามทวินาม $(x+y)^n$ โดยเราจะพบว่าค่าเชิงการจัดกลุ่ม $\binom{n}{r}$ นั้นจะเป็นส่วนของค่าสัมประสิทธ์ของพหุนามที่ได้มาจากการกระจายพหุนามทวินามดังกล่าว ทำให้บ่อยครั้งสัญลักษณ์เชิงการจัดกลุ่มดังกล่าวอาจจะถูกเรียกว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม** (binomial coefficient)

10.4.1 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินาม

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะได้ว่า

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

พิสูจน์โดยใช้หลักการนับ!

Example 10.4.1. (easy exercise)

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2y^6 ที่ได้จากการกระจาย $(2x+y^2)^5$
2. จงใช้ทฤษฎีบททวินามหา $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$

Solution. ...

10.4.2 การใช้ทฤษฎีบททวินามในการพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงการจัด

Example 10.4.2. จงแสดงว่า

1. $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=0$
2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}\cdots+\binom{n}{2k}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}\cdots+\binom{n}{2k+1}+\cdots=2^{n-1}$
3. $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}=n\cdot 2^{n-1}$
4. ***$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=\binom{m+n}{r}$

Solution. ...

10.4.3 โจทย์ปัญหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดกลุ่ม

Example 10.4.3.

1. มีกี่วิธีในการเดินตามจุดพิกัดจำนวนเต็มจากจุด $(0,0)$ ไปจุด $(11,5)$ ใดๆ โดยที่เดินได้แค่ทิศขึ้นและทางขวาเท่านั้น
2. จากโจทย์ข้อที่ 1 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าต้องผ่านจุด $(4,3)$ ก่อน จะเดินได้กี่วิธี
3. จากโจทย์ข้อที่ 1 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าต้องผ่านเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด $(2,3)$ และ $(3,3)$ ก่อน จะเดินได้กี่วิธี

Solution. ...

10.5 หลักการนำเข้า-ตัดออก

10.6 กฎรังนกพิราบ

10.7 Programming about Combinatorics

Chapter 11

Recurrence Relation

Chapter 12

Graph Theory

Part III

Basic Algorithm Design based upon Discrete Mathematics

Part IV

In-Class Worksheet

Chapter 13

Recursive Algorithm - an approach to functional programming

Index