CHAPTER 7

ตัวแบบแถวคอย (Queuing Theory)

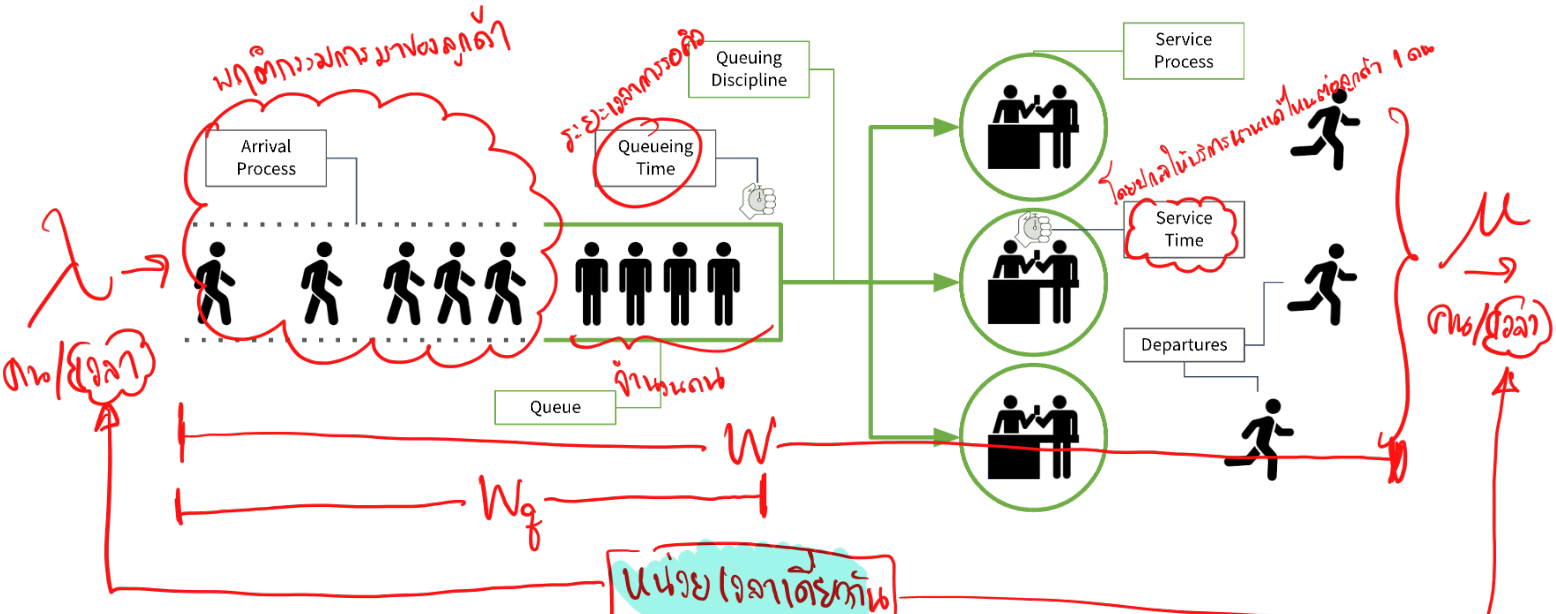
7.1 บทนำ

- ระบบแถวคอย (การเข้าคิว) คือระบบที่มีผู้ให้บริการและมีผู้มารับบริการ โดยที่ผู้รับบริการอาจจะได้รับบริการทันที หรืออาจจะต้องรอเพื่อรับบริการตามลำดับ
- เป้าหมายของบทนี้คือวิเคราะห์และอธิบายระบบการเข้าแถวแบบต่าง ๆ ในแง่ของต้นทุนและแรงงาน

7.2 โครงสร้างของระบบแถวคอย

โครงสร้างสำคัญของระบบแถวคอยประกอบด้วย

1. ลูกค้า (ผู้มาใช้บริการ): ลักษณะการมาเป็นอย่างไร (อัตราการมา)
2. รูปแบบของระบบบริการ: มีกี่แถว มีกี่หน่วยบริการ และกระบวนต่อจากการให้บริการของหน่วยบริการเป็นอย่างไร
3. หน่วยให้บริการ: อัตราการให้บริการเป็นอย่างไร



7.2.1 ลักษณะของลูกค้า

จำนวนผู้เข้ารับบริการ:

- ◇ มีผู้เข้ารับบริการได้ไม่จำกัด
- ◇ มีผู้เข้ารับบริการได้จำกัด

*** นอกจากประเดินเรื่องความจำกัดของผู้เข้าคิวแล้ว ยังมีประเด็นเรื่องอัตราการมาเข้ารับบริการ (arrival rate) ซึ่งมักสมมติเป็น 2 รูปแบบ

- ◇ ผู้เข้ารับบริการมาแบบอัตราคงที่
- ◇ ผู้เข้ารับบริการมาแบบสุ่ม ซึ่งมักถูกสมมติให้สุ่มด้วยการแจกแจงแบบปัวซง (Poisson distribution)

ทั้งนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมาเข้ารับบริการอาจจะมีการแจกแจงแบบอื่นได้เช่นกันขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมของแต่ละธุรกิจ

อัตราการมา มีหน่วยเป็น คน/หน่วยเวลา 1 ชั่วโมง 10 นาที

Arrival Rate: Poisson distribution

คุณสมบัติ 7.1: การแจกแจงปัวซงของอัตราการเข้ารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผู้เข้ารับบริการในช่วงระยะเวลาที่กำหนด เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบปัวซงที่อัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการมีค่าเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ x คนมีค่าเท่ากับ

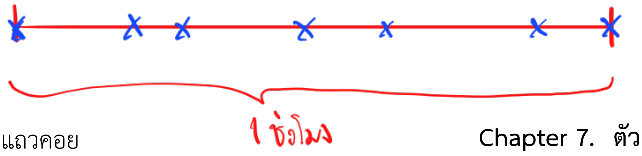
ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าเข้ามา x คนในระยะเวลาที่กำหนด

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

ตัวอย่าง 7.2.1: Warm-up Poisson

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้จำนวนผู้ใช้บริการห้างสรรพสินค้าแห่งนี้มีการแจกแจงแบบปัวซง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ 15 คน
2. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการไม่เกิน 5 คน
3. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการเกิน 5 คน



อัตราการมา = 7 คน/ชั่วโมง

ระยะห่างเวลา = $\frac{1 \text{ ชั่วโมง}}{7 \text{ คน}} = \frac{1}{7}$ ชั่วโมง/คน

Arrival Time Interval: Exponential distribution (หน่วยเวลา/คน)

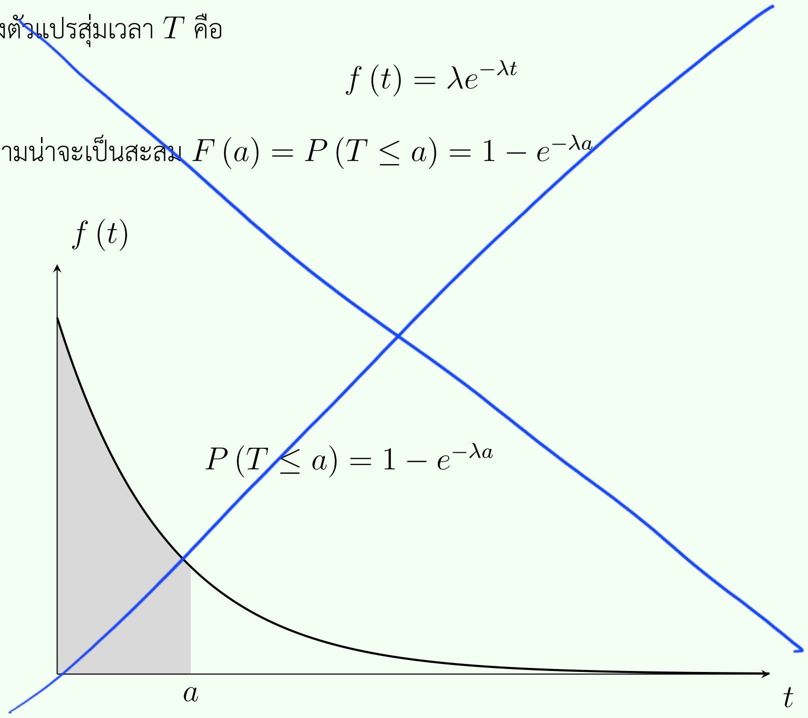
นอกจากการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้เข้าใช้บริการที่มีการแจกแจงแบบปัวซงแล้วนั้น ยังมีการแจกแจงอีกแบบที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้อกันคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ (arrival time interval)

คุณสมบัติ 7.2: การแจกแจงเอกซ์โพเนเชียลของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่มีอัตราการเข้ามาใช้บริการเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเวลา T คือ

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

ซึ่งจะได้ว่าความน่าจะเป็นสะสม $F(a) = P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$



ตัวอย่าง 7.2.2: Warm-up Exponential

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้การเข้าใช้บริการเป็นกระบวนการปัวซง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามาใช้บริการภายใน 30 นาที
2. ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้เข้ามาใช้บริการในช่วง 20 นาที

7.2.2 ลักษณะของแถวคอย

7.2.2.1 รูปแบบของระบบ

1. ระบบช่องทางเดียว-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่างเช่นตู้เอทีเอ็ม 1 ตู้
2. ระบบช่องทางเดียว-~~หลายขั้นตอน~~: ตัวอย่างเช่นการจ่ายยาในโรงพยาบาลขนาดเล็กที่มี 1 เคาท์เตอร์จ่ายยาและ 1 เคาท์เตอร์เก็บเงินที่ผู้ป่วยจะต้องเข้าคิวจ่ายเงินก่อนแล้วค่อยเข้าคิวรับยาในขั้นตอนถัดไป
3. ระบบหลายช่องทาง-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่างเช่นตู้ซื้อเหรียญโดยสาร MRT บางสถานีที่มีการเข้าคิว 1 แถวเพื่อกระจายคนไปตู้หลายตู้
4. ระบบหลายช่องทาง-~~หลายขั้นตอน~~: ตัวอย่างเช่นแผนกจ่ายยาในโรงพยาบาลใหญ่ที่แต่ละขั้นตอนมีผู้ให้บริการมากกว่า 1 คน

7.2.2.2 ความยาวของแถวคอย

1. จำกัด: เช่นในกรณีที่พื้นที่การเข้าแถวมีจำกัดทำให้เมื่อที่นั่งรอเต็มแล้วจะไม่สามารถรับลูกค้าเข้ามาเพิ่มได้อีกจนกว่าจะมีที่ว่าง เช่นปั๊มน้ำมัน
2. ไม่จำกัด: เช่นเอกสารที่รอการพิมพ์ หรือระบบการจองที่ไม่ต้องอาศัยพื้นที่ทางกายภาพ

7.2.3 ลักษณะของหน่วยให้บริการ

ในทำนองเดียวกันกับลักษณะการเข้ามาของลูกค้า เราจะสมมติให้เวลาของการให้เป็นบริการเป็นกระบวนการปัวซงเช่นกัน กล่าวคือ

- การแจกแจงของเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล: กำหนดให้ μ เป็นอัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (คนต่อหน่วยเวลา) จะได้ว่า $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ เมื่อ $t > 0$ ซึ่งจะได้ตามมาว่า $\cancel{P(T > t) = e^{-\mu t}}$
- การแจกแจงของจำนวนคนที่ให้บริการได้ในหน่วยเวลาเป็นแบบปัวซง: กล่าวคือ $P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$

เข้ามารับบริการ

ตัวอย่าง 7.2.3: อัตราการ กับ เวลาที่ใช้

จงหาอัตราของการให้บริการของหน่วยบริการหนึ่งเมื่อกำหนดให้หน่วยบริการนั้นใช้เวลาให้บริการ $\boxed{3 \text{ นาทีต่อคน}}$

คน/นาที

3 นาที/คน

$$\text{อัตราของการให้บริการ} = \frac{1}{\text{เวลาที่ใช้ในการให้บริการ}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3 \text{ นาที}}{1 \text{ คน}}} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{คน}}{\text{นาที}} \approx 0.33 \text{ คน/นาที}$$

7.3 ตัวแบบแถวคอย (เบื้องต้น)

ทั้งนี้ลักษณะของแถวคอยที่เราจะทำการศึกษาจะมีลักษณะดังต่อไปนี้

- แถวคอยขั้นตอนเดียว
- หน่วยบริการมีได้ตั้งแต่ $1, 2, \ldots,$ หรือ n หน่วยบริการ
- มาก่อนได้รับบริการก่อน
- การมารับบริการและการให้บริการเป็นแบบปัวซง (จำนวนครั้งเป็นปัวซง และระยะเวลาเป็นเอกซ์โพนเนเชียล)

7.3.0.1 Kendall Notation

เราจะเขียนรูปแบบแถวคอยเป็นสัญลักษณ์แบบ Kendall Notation ดังนี้

นิยาม 7.3.1: Kendall Notation

การเข้ามา การออกจากระบบ จำนวนหน่วยบริการ

$$A/B/s$$

$\boxed{M/M}/1$

$\boxed{M/M}/2$

$M/M/s$ ← มี s หน่วยบริการ

โดยที่

Poisson Process
จำนวนคน ~ Poisson
ระยะเวลา ~ Exponential

$A =$ การแจกแจงของอัตราการมารับบริการ

$B =$ การแจกแจงของอัตราการให้บริการ

$s =$ จำนวนหน่วยของผู้ให้บริการ

และสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการแจกแจงมีดังนี้

$M =$ แจกแจงแบบปัวซง

$D =$ แจกแจงแบบคงที่

$G =$ อัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบปกติ

7.3.0.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แถวคอย

เข้ามา 2 คน/10 นาที → 12 คน/ชั่วโมง

$\frac{2 \text{ คน}}{10 \text{ นาที}} \times \frac{60 \text{ นาที}}{1 \text{ ชั่วโมง}} = 12 \text{ คน/ชั่วโมง}$

นิยาม 7.3.2: Notation

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แถวคอยมีดังนี้

(lambda) λ = อัตราการเข้ามารับบริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา) : คน/เวลา

(mu) μ = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่หน่วยบริการสามารถให้บริการแล้วเสร็จในหนึ่งหน่วยเวลา) คน/เวลา

ต้องหน่วยเวลาเดียวกัน

(rho) ρ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน (มีผู้รับบริการอยู่ในหน่วยบริการ)

P_0 = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง (ไม่มีลูกค้าในร้าน)

L = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ (ทั้งที่กำลังรับบริการและกำลังรอในแถวคอย)

L_q = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย

W = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรับบริการในระบบตั้งแต่เข้ามาจนเสร็จ

W_q = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรอคอยอยู่ในแถวคอย

P_n = ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามารับบริการจำนวน n คนในระบบแถวคอย

7.3.1 ตัวแบบ M/M/1

แถวคอยที่มีอัตราการเข้ารับบริการแบบสุ่มแบบกระบวนการปัวซง, มีอัตราการให้บริการแบบปัวซอง และมี 1 หน่วยบริการ (กล่าวคือถ้ายังมี 1 คนใช้บริการอยู่คนที่เหลือต้องเข้าแถวคอยจนกว่าจะใช้บริการเสร็จและออกจากหน่วยบริการ)

ทฤษฎีบท 7.3.1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแถวคอยแบบ M/M/1

$\lambda = ?$ $\mu = ?$

อย่าลืมทำหน่วยเวลาให้เหมือนกัน

ความน่าจะเป็นที่ระบบว่าง

ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n คนเข้ามาใช้บริการ

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu},} \qquad \boxed{P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \qquad P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \qquad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \rho L$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \rho W$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < \mu$

จริง ๆ แล้วสูตรเหล่านี้มีที่มาจากการใช้การคำนวณเชิงความน่าจะเป็น (ความน่าจะเป็น, ตัวแปรสุ่ม, การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง, ค่าคาดหวัง) นักศึกษาที่แม่นในส่วนของการคำนวณเหล่านี้จะสามารถคำนวณตัวแปรต่าง ๆ ได้ด้วยตัวเองโดยที่ไม่จำเป็นต้องรู้สูตรเหล่านี้ก็ได้

ตัวอย่าง 7.3.1: M/M/1

บริการถ่ายเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 1 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่ม~~ปัวซง~~ในอัตรานาทีละ 2 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการ~~แจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล~~ด้วยค่าเฉลี่ย 1/4 นาทีต่อคน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของบริการเครื่องถ่ายเอกสาร

$\frac{\text{นาที}}{\text{คน}}$

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}},\quad P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu},\quad P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda},\quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda},\quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

ความน่าจะเป็น

$\lambda = \boxed{2}$ คน/นาที

$\mu = \boxed{1/_{1/4} = 4}$ คน/นาที

เทียบบัญญัติไตรยางศ์

1 นาที

0.25 นาที 0.25 0.25 0.25

1 2 3 4

1 คน

$\boxed{0.25 \text{ นาที}} \rightarrow \boxed{1 \text{ คน}}$

$\boxed{1 \text{ นาที}} \rightarrow \boxed{\quad \text{คน}}$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\ \cancel{\text{คน/นาที}}}{4\ \cancel{\text{คน/นาที}}} = 0.5$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 0.5\,(0.5)^n$$

$$P_5 = P_0\,\rho\rho\rho\rho\rho = 0.5(0.5)^5 = 0.015625$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ คน}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2^2}{4(4-2)} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\times 2} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ คน}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ นาที} \quad (= 30 \text{ วินาที})$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{4(4-2)} = \frac{\cancel{2}}{4\times\cancel{2}} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ นาที} \quad (= 15 \text{ วินาที})$$

ตัวอย่าง 7.3.2: M/M/1

ร้านค้าแห่งหนึ่งกำลังวางแผนพัฒนาเรื่องการรอคิวของลูกค้าเพื่อไม่ให้ลูกค้าต้องรอคิวนานจึงได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้าและพบว่าจำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบปัวซอง ในส่วนของทางร้าน พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาทีและมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ปัจจุบันทางร้านมีพนักงาน 1 คน จงวิเคราะห์แถวคอยของร้านค้าแห่งนี้

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu},} \qquad P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \qquad P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$ ← ความน่าจะเป็น

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \qquad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$ ← จำนวนคน

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$ ← ระยะเวลา

$\lambda = 20$ คน/ชั่วโมง

$\mu = 1 \frac{\text{คน}}{2\ \cancel{\text{นาที}}} \times \frac{\overset{30}{\cancel{60}}\ \cancel{\text{นาที}}}{1\ \text{ชั่วโมง}}$

$= 30$ คน/ชั่วโมง

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\cancel{0}}{3\cancel{0}}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e.x. ความน่าจะเป็นที่เข้าร้านมาเจอลูกค้าในร้าน 10 คน $P_{10} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30-20} = \frac{20}{10} = 2 \text{ คน}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20^2}{30(30-20)} = \frac{2\cancel{0} \times 2\cancel{0}}{3\cancel{0} \times 1\cancel{0}} = \frac{4}{3} \text{ คน} \approx 1.33 \text{ คน}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30-20} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ ชั่วโมง} = \underline{\quad 6 \quad} \text{ นาที}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20}{30(30-20)} = \frac{2\cancel{0}}{30 \times 1\cancel{0}} = \frac{1}{15}$$

$\boxed{0.1\ \cancel{\text{ชั่วโมง}} \times \frac{60\ \text{นาที}}{1\ \cancel{\text{ชั่วโมง}}} = 6 \text{ นาที}}$

$= \frac{1}{\cancel{15}}\ \cancel{\text{ชั่วโมง}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{60}}\ \text{นาที}}{1\ \cancel{\text{ชั่วโมง}}} = 4 \text{ นาที}$

7.3.2 ตัวแบบ M/M/s

ทฤษฎีบท 7.3.2: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแถวคอยแบบ M/M/s

S = จำนวนหน่วยบริการ

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}, \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right]}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{เมื่อ} \quad n \le s \\ P_0\frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} & \text{เมื่อ} \quad n > s \end{cases}$$

$$L_q = P_0\left[\frac{(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}\right], \qquad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < s\mu$

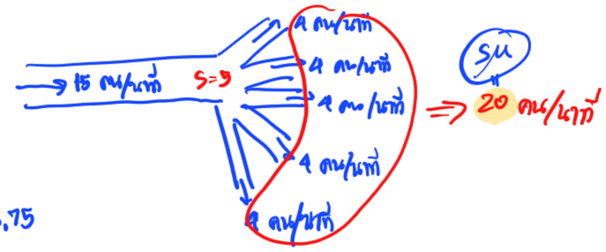
ตัวอย่าง 7.3.3: M/M/s

บริการถ่ายเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 5 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่มปัวซงในอัตรานาทีละ ~~4~~ 15 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 1/4 นาทีต่อคน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของบริการเครื่องถ่ายเอกสาร

$\lambda = 15$ คน/นาที

$\mu = \dfrac{1}{\frac{1}{4}\,\frac{\text{นาที}}{\text{คน}}} = 4$ คน/นาที

$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{15}{5\times 4} = \dfrac{15}{20} = 0.75$



$\lambda/\mu = \dfrac{15}{4} = 3.75$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right]}$$

$\dfrac{(3.75)^5}{5!}\cdot\dfrac{20}{20-15} = 24.7192$

$$\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{4}\frac{3.75^n}{n!} = \frac{3.75^0}{0!}+\frac{3.75^1}{1!}+\frac{3.75^2}{2!}+\frac{3.75^3}{3!}+\frac{3.75^4}{4!}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{3.75}{1} + \frac{3.75^2}{2} + \frac{3.75^3}{6} + \frac{3.75^4}{24}$$

$$= 1 + 3.75 + 7.0313 + 8.7891 + 8.2398$$

$$\approx 28.8102$$

$$\therefore P_0 = \frac{1}{28.8102 + 24.7192} = 0.0187$$

$\lambda = 15$, $\mu = 4$, $s = 5$, $P_0 = 0.0187$, $\rho = 0.75$

$\lambda/\mu = 3.75$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{เมื่อ} \quad n \le s \ (n \le 5) \\ P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} & \text{เมื่อ} \quad n > s \end{cases} = \begin{cases} 0.0187 \times \frac{(3.75)^n}{n!} & \text{เมื่อ} \quad n \le 5 \\ 0.0187 \times \frac{(3.75)^n}{5! \times 5^{n-5}} & \text{เมื่อ} \quad n > 5 \end{cases}$$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times \ldots \times 5$

$$\boxed{L_q = P_0 \left[\frac{(\boxed{\lambda/\mu})^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} \right], \qquad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$s \uparrow \sim L_q \downarrow \sim L \downarrow$

$$L_q = P_0 \left[\frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} \right] = 0.0187 \left[\frac{(3.75)^5 \times 0.75}{5!\,(1-0.75)^2} \right] = 1.3867 \text{ คน}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.3867 + 3.75 = 5.1367 \text{ คน}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.3867}{15} = 0.0924 \text{ นาที}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$P_0 = \frac{1}{\boxed{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}} + \boxed{\left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right]}}$$

$s! = 1\times2\times3\times\cdots\times s$

factorial

$n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$ โดยที่ $0! = 1$

e.x. $7! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7$

ตัวไล่เพื่อแทนค่า แล้วจับมาบวกกัน

$$\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\boxed{\lambda/\mu})^n}{n!} = \frac{\square^0}{0!} + \frac{\square^1}{1!} + \frac{\square^2}{2!} + \cdots + \frac{\square^{s-1}}{(s-1)!}$$

$s=5$

$s-1=5-1=4$

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{\square^n}{n!} = \frac{\square^0}{0!} + \frac{\square^1}{1!} + \frac{\square^2}{2!} + \frac{\square^3}{3!} + \frac{\square^4}{4!}$$

$$= \frac{\square^0}{1} + \frac{\square^1}{1} + \frac{\square^2}{1\times2} + \frac{\square^3}{1\times2\times3} + \frac{\square^4}{1\times2\times3\times4}$$

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

7.3.3 ตัวแบบ M/G/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.3.4 ตัวแบบ M/D/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.4 ตัวแบบแถวคอย (ทฤษฎี)

(ข้ามสำหรับ 720201)

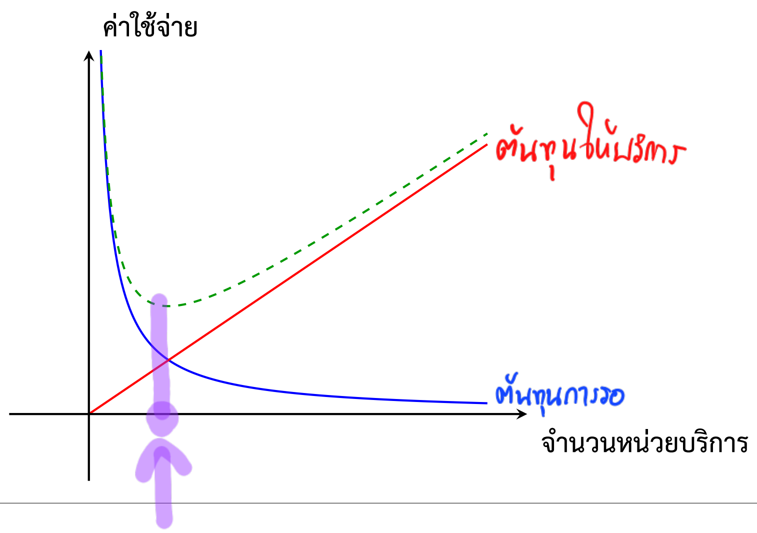
7.5 การวิเคราะห์ระบบแถวคอยเพื่อการตัดสินใจทางธุรกิจ

ชัดเจนว่าวิธีการหนึ่งที่จะทำให้ลูกค้าไม่ต้องรอคอยคือการเพิ่มหน่วยบริการเข้าไปให้มากพอ หรือมากกว่าลูกค้าที่เข้ามา ก็จะทำให้ลูกค้าทุกคนสามารถได้รับบริการได้ทันที ทว่าวิธีการดังกล่าวอาจจะเป็นไปไม่ได้เพราะใช้ต้นทุนสูงหรือทรัพยากรไม่เพียงพอ (เช่นพื้นที่ร้าน) เราจึงต้องทำการ trade-off กันระหว่างจำนวนหน่วยบริการกับต้นทุนที่ใช้

ทั้งนี้ ต้นทุนที่จะนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์แถวคอยมี 2 หมวดดังนี้

1. **ต้นทุนการให้บริการ** (service cost): เช่นค่าแรงงาน ค่าเช่าสถานที่ ที่แปรผันตรงกับจำนวนหน่วยบริการ กล่าวคือ ยิ่งเพิ่มหน่วยบริการมากขึ้น ก็จะใช้ต้นทุนมากขึ้นเรื่อย ๆ
2. **ต้นทุนในการรอคอยของลูกค้า** (waiting cost): เป็นค่าเสียหายที่เกิดจากการรอคอยที่ยิ่งลูกค้ารอคอยนานเท่าไหร่ ก็จะยิ่งมีค่าใช้จ่ายมากขึ้นเท่านั้น เช่นการประเมิณความพึงพอใจของลูกค้า หรือต้นทุนของบริการเพิ่มเติมที่ลูกค้าได้รับขณะรอคิว (เช่นร้าน Haidilao มีบริการทำเล็บหรือขนมฟรีของลูกค้าที่กำลังรอคิว)

$$\text{ค่าใช้จ่ายรวม} = \text{ต้นทุนการให้บริการ} + \text{ต้นทุนการรอคอยของลูกค้า}$$
$$TC = \boxed{s \cdot C_s} + L \cdot C_w$$



7.5.1 การกำหนดจำนวนหน่วยบริการ

โจทย์ที่มักจะถูกถามเป็นอันดับแรกคือเราควรจะทำหน่วยบริการกี่หน่วยดีเพื่อให้เพียงพอที่จะทำให้ลูกค้าพอใจโดยที่ไม่ต้องใช้ต้นทุนเยอะจนเกินไป ซึ่งวิธีการคือการวิเคราะห์หาจุดต่ำสุดของค่าใช้จ่ายรวม แต่ในทางปฏิบัติ เนื่องจากเราต้องการหาจุดเหมาะสุดของตัวแปรเดียวที่เป็นจำนวนนับ จึงเป็นการง่ายที่จะทำการวิเคราะห์หาต้นทุนรวมของ M/M/1, M/M/2, ... ไปเรื่อย ๆ จนเจอจุดที่ให้ค่าต่ำสุด (ลดลงเรื่อย ๆ จนเจอจุดที่เพิ่มอีกหน่วยแล้วมีต้นทุนมากขึ้น)

ตัวอย่าง 7.5.1

จากตัวอย่าง 7.3.2 ที่จำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบปัวซอง, พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาทีและมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล สมมติว่าปัจจุบันมีพนักงาน 3 คนอยู่แล้ว จงหาว่าร้านนี้ควรจ้างพนักงานบริการชำระเงินเพิ่มอีกกี่คนมาทำงาน

7.5.2 การตัดสินใจจัดรูปแบบแถวคอย

ตัวอย่าง 7.5.2

จากตัวอย่าง 7.5.1 มีนักวิเคราะห์เสนอว่าแทนที่จะเพิ่มจำนวนพนักงานให้ลองเปลี่ยนรูปแบบเป็นแต่ละพนักงานมีแถวคอยเป็นของตัวเอง และลูกค้าที่เข้ามาจะกระจายตัวกันตามแถวคอยทั้ง 3 แถว กล่าวคือลองเปลี่ยนจาก M/M/3 เป็น M/M/1 ทั้งหมด 3 ระบบอิสระจากกัน จงวิเคราะห์ต้นทุนรวมของระบบใหม่นี้

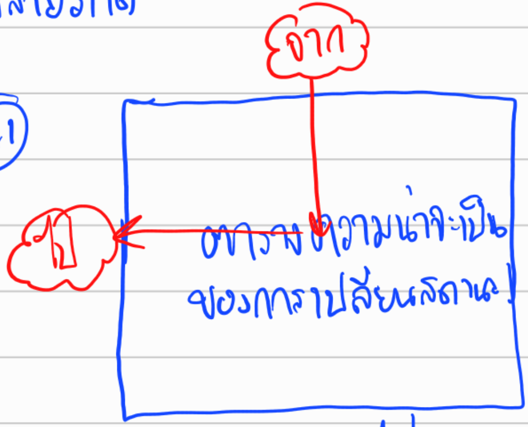
7.5.3 การตัดสินใจในลักษณะอื่น ๆ

ตัวอย่าง 7.5.3

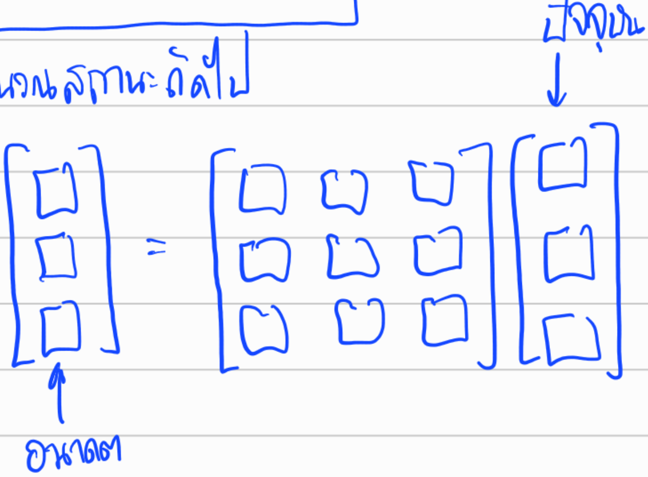
บริษัทโลจิสติกแห่งหนึ่งให้บริการทั่วไปเกี่ยวกับการขนส่งและจัดเก็บสินค้า โดยปัจจุบันมีโกดังเก็บสินค้าเพียงแห่งเดียว ซึ่งมีที่เทียบรถบรรทุกเพื่อขนส่งสินค้าขึ้นลงได้ครั้งละ 1 คัน รถเข้ามาเฉลี่ยทุก ๆ 40 นาที แจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล การขนสินค้าขึ้นลงใช้เวลาเฉลี่ยคันละ 30 นาที แจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ถ้าบริษัทต้องการให้รถแต่ละคันใช้เวลาในระบบการขนถ่ายสินค้าไม่เกินคันละ 1 ชั่วโมง ควรใช้เวลาในการขนสินค้าคันละกี่นาที

สิ่งที่ออกสอบปลายภาค

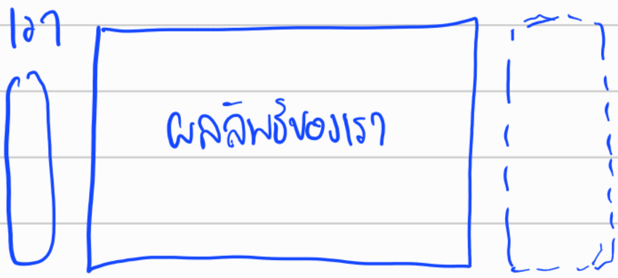
1) Markov (1.1)



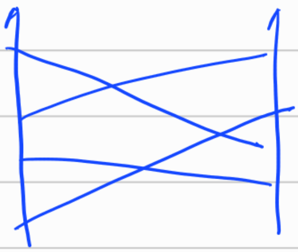
(1.2) การคำนวณสถานะถัดไป



2) ทฤษฎีเกม 2.1) คำนวณหา Maximin & Minimax



2.2) กลยุทธ์ผสม ด้วยการวาดกราฟ



3) การพยากรณ์ 3.1) คำนวณผลการทำนายจากทุกตัวแบบอนุกรมเวลา

3.2) คำนวณ MAE

4) แถวคอย : ออก M/M/S หา P_0, L_q, L_s